Tenký nevodivý prstenec o poloměru R s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem o délkové hustotě τ. Jaká je intenzita E elektrického pole v bodě P

DÚ

potenciál

z/r

$E_p = (0, 0, E_z)$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\, dl}{r^2}\cdot \cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\, dl}{r^3} z \qquad dl = R\,d\varphi$$

$$E_z = \int_\varphi dE_z = \frac{\tau z R}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\tau z R}{2\varepsilon_0 r^3}$$

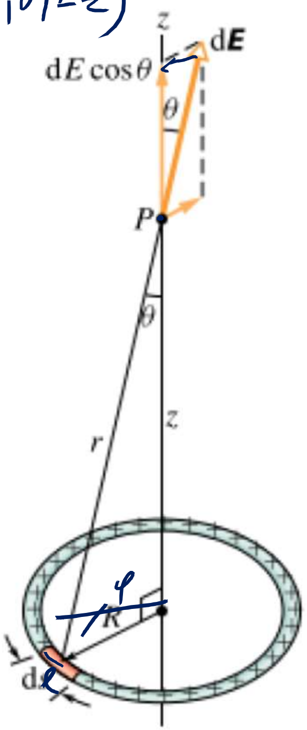
$r^3 = (R^2+z^2)^{3/2}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -E_z$$

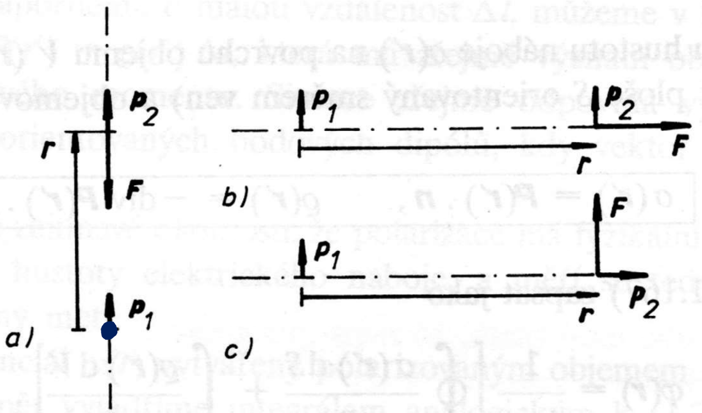
$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\, dl}{r}$$

$Q_c = 2\pi R\tau$

$$\varphi_p = \int_\varphi \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau R\, d\varphi}{r} = \frac{\tau R}{4\pi\varepsilon_0 r} 2\pi \to \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

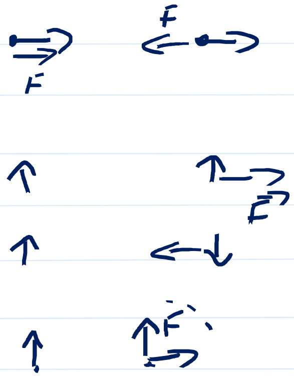


Síla působící mezi dvěma dipóly



DÚ

Zvláštní případy vzájemné polohy dvou elektrických dipólů k určení jejich silového působení

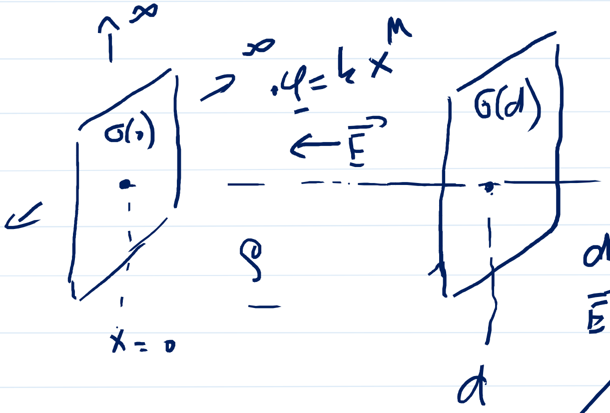


$\vec{F}_2 = (\vec{p}_2 \cdot \nabla)\vec{E}_1$ v učebnici na str. 78

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(3\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r^2}\vec{r} - \vec{p}_1\right)$ kap 1.3.5

$\vec{p}_1$ je v počátku

1.1.23. Mezi dvěma rovnoběžnými vodivými rovinami vzdálenými o d je průběh potenciálu dán vztahem $\varphi = kx^n$ (k a n > 1 jsou konstanty, x je vzdálenost od jedné z rovin).
Je třeba určit průběh objemové hustoty náboje ρ v prostoru mezi rovinami a plošnou hustotu σ náboje na vodivých rovinách.



$\varphi = \varphi(x)$

$\vec{E} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, 0, 0\right)$

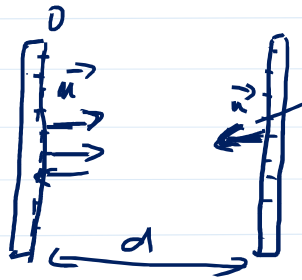
$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = kn x^{n-1}$

G.Z.

$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$

$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$



$(-1, 0, 0)$

$\rho = ?$ $\sigma(0)$ a $\sigma(d)$

$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ mezi $\rightarrow \rho$

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = kn(n-1)x^{n-2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \underline{\underline{\rho = -\varepsilon_0 kn(n-1)\, x^{n-2}}}$

$\sigma = \varepsilon_0 E$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ na povrchu vodiče

normál. složka $\vec{E}$

$\rightarrow \vec{E}\cdot\vec{n}$

$\vec{E} = \left(\underbrace{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, 0, 0\right)$

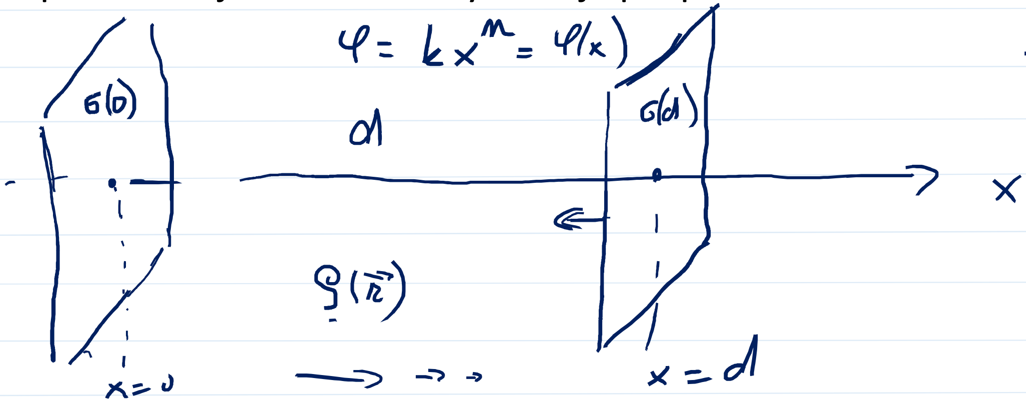
$x=0$ $= E_x$

$x=d$ $= \underline{-E_x}$

$x=0$ $\sigma(0) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{x=0} \Rightarrow \underline{\underline{\sigma(0) = 0}}$

$x=d$ $\sigma(d) = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{x=d} = \varepsilon_0 kn x^{n-1}\Big|_{x=d} = \underline{\underline{\varepsilon_0 kn d^{n-1}}}$

1.1.23. Mezi dvěma rovnoběžnými vodivými rovinami vzdálenými o d je průběh potenciálu dán vztahem φ = kx^n (k a n > 1 jsou konstanty, *x* je vzdálenost od jedné z rovin).
Je třeba určit průběh objemové hustoty náboje ρ v prostoru mezi rovinami a plošnou hustotu σ náboje na vodivých rovinách.



$\varphi = k x^n = \varphi(x)$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = \left(-\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}, 0, 0\right)$

$\rho = ?$ $\quad \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\quad \Delta\varphi = k\frac{\partial^2 x^n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = kn(n-1)\,x^{n-2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\rho = -\varepsilon_0 k n(n-1)\, x^{n-2}}$$

$\sigma - ?$ opět platí

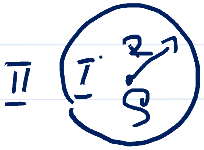
$\vec{E}\cdot\vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$x=0 \quad \sigma(0) = \varepsilon_0(\vec{E}\cdot\vec{n})\big|_{x=0} = \varepsilon_0(E_x)\big|_{x=} = -\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\varepsilon_0\, 0 = \emptyset$

$x=d \quad \sigma(d) = \varepsilon(\vec{E}\cdot\vec{n})\big|_{x=d} = \varepsilon_0(-E_x)\big|_{x=d} = \varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=d} = \varepsilon_0 k\cdot n x^{n-1}\big|_{x=d} = \underline{\varepsilon_0 k n d^{n-1}}$

Modif. S 1.1.24 Koule o poloměru R je rovnoměrně nabita nábojem s objemovou hustotou ρ=konst. Nalezněte průběh potenciálu pomocí integrace Poissonovy rovnice $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



→ sférické souř. $r, \vartheta, \varphi \to \varphi(r)$

jak vypadá Laplace →

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\varphi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2}$$

pro $\varphi = \varphi(r)$ $\quad \Delta \to \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}$

↳ $\Delta \to \frac{1}{r}\frac{d^2(r\varphi)}{dr^2}$

naše rovnice →

I $\quad \frac{1}{r}\frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\quad$ pro $r \leq R$ $\quad$ uvnitř → φ_I spojité

$\Longrightarrow \varphi_I(R) = \varphi_{II}(R)$

II $\quad \cancel{\frac{1}{r}}\frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} = 0$ $\quad$ pro $r \geq R$ vně → φ_{II}

+ 2 podmínky – potenciál je spojitý $\varphi_I(R) = \varphi_{II}(R)$

norm. složka $\vec{E}$ je spojitá $\left.\frac{\partial\varphi_I}{\partial r}\right|_R = \left.\frac{\partial\varphi_{II}}{\partial r}\right|_R$

~~Síla působící mezi dvěma dipóly~~

I

$r \leq R$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} = \int \frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} = \int -r\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{d(r\varphi)}{dr} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{2} + A_1 \qquad \Big/ \text{ integrujem}$$

$$\Rightarrow r\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{r^3}{3} + A_1 r + B_1$$

$$\varphi_I = -\frac{\varrho}{6\varepsilon_0}r^2 + A_1 + \frac{B_1}{r}$$

II

$r \geq R$

$$\frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} = 0 \rightarrow \frac{d(r\varphi)}{dr} = C_1 \overset{\text{2. integ}}{\Rightarrow} r\varphi = C_1 r + D_1$$

$$\varphi_{II} = C_1 + \frac{D_1}{r}$$

$$\varphi_I = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + A_1 + \frac{B_1}{r} \quad r \le R \qquad \Big| \qquad \varphi_{II} = C_1 + \frac{D_1}{r} \quad r \ge R$$

$$\varphi_{II}(\infty) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \qquad \varphi_{II} = \frac{D_1}{r}$$

$$\varphi_I(0) = \text{konečný} \Rightarrow B_1 = 0 \qquad \varphi_I = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + A_1$$

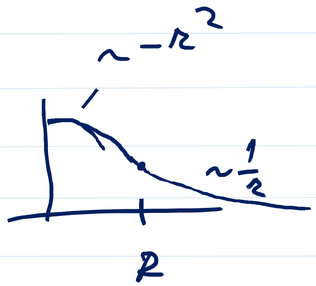
---

1. podmínka $\varphi_I(R) = \varphi_{II}(R) \Rightarrow \frac{D_1}{R} = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} R^2 + A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{D_1}{R} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0} R^2 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_0} R^2}}$

2. Podm. $\left.\frac{\partial \varphi_I}{\partial r}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial r}\right|_{r=R} \quad -D_1 \frac{1}{R^2} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} R \Rightarrow \underline{D_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R^3}$

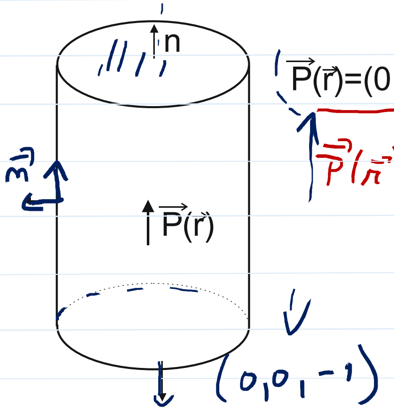
$$\varphi_{II}(r) = \frac{4\pi}{4\pi}\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\varphi_I(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)$$



Určete pole na ose homogenně polarizovaného válce

$P \bullet \vec{E}, \vec{D}$ $\uparrow z$



$\vec{P}(\vec{r})=(0,0,P_0)$ konst $\Rightarrow \rho_V = 0$

$\vec{P}(\vec{r}) = 0$ vně válce

$\vec{P}(\vec{r})$

DÚ

z DÚ

$\vec{E}$ pro $0<z<h$ ve válci

pro $z>h$ nad válcem

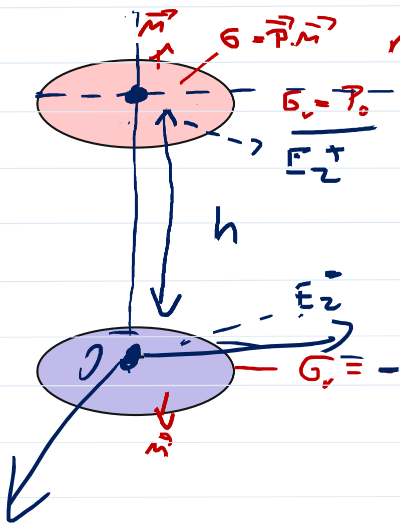
totéž pro $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

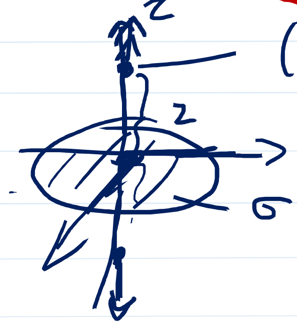
Ověřte chování norm. složek $\vec{E}$ a $\vec{D}$ na horní podstavě válce

lze nahradit objemovými náboji $\rho_V = -\operatorname{div}\vec{P} = 0$

a plošnými σ $\quad \vec{P}\cdot\vec{n}$; na plášti válce $\vec{P} \perp \vec{m} - \sigma = 0$

$\sigma = \vec{P}\cdot\vec{m}$ na podstavcích $\sigma = \pm P_0$





$(0,0,E_z(z))$

$$E_z^{\pm} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \quad z>0$$

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \quad z<0$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\cdot\frac{z}{|z|} \quad \forall z$$

$$E_z = E_z^+ + E_z^- = $$

$$= \frac{-P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|}$$

$$+ \frac{+P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z-h|}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right)\frac{(z-h)}{|z-h|}$$