Algebrou proti koronaviru V

(cvičení cihlovou barvou jsme udělali na cvičení, a tak je můžete vynechat)

Dělení v Gaussových celých číslech

O tom, jak dělit v $\mathbb{Z}[i]$ a jaké to má nástrahy, něco říká Tvrzení 3.4, resp. Úloha 7.$\frac{3}{2}$ ze skript.

1. Vydělte v oboru $\mathbb{Z}[i]$ se zbytkem číslo α číslem β, je-li:
   (a) $\alpha = 5 + 7i$, $\beta = 3 - i$
   (b) $\alpha = 3 + 2i$, $\beta = 1 + i$ [$3 + 2i = 2 \cdot \beta + 1 = 3 \cdot \beta + (-i) = (2 - i) \cdot \beta + i = (3 - i) \cdot \beta - 1$]
2. Nalezněte v $\mathbb{Z}[i]$ NSD čísel
   (a) $3 + i, 4 + 2i$ [$1 + i$]
   (b) $3 + 6i, 12 - 3i$ [3]
   (c) $5 + 3i, 13 + 18i$ [$1 + 4i$]

A ještě na téma jednoznačných rozkladů:

3. Vysvětlete následující „rozpor“:
   (a) V oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ platí $(-2)2 = (i\sqrt{3} + 1)(i\sqrt{3} - 1)$, a proto se nejedná o obor s jednoznačným rozkladem (tj. Gaussův obor).
   (b) V oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ platí $\sqrt{2}\sqrt{2} = (-4 + 3\sqrt{2})(4 + 3\sqrt{2})$, a přesto se jedná o obor s jednoznačným rozkladem. [$(\pm 4 + 3\sqrt{2}) = \sqrt{2}(3 \pm 2\sqrt{2})$, přičemž $3 \pm 2\sqrt{2}$ jsou zde invertibilní (mají normu 1), tudíž $\pm 4 + 3\sqrt{2} \parallel \pm\sqrt{2}$]

Ideály v okruzích

Definici ideálu (i s obrázkem!) viz na str. 38 skript a definici hlavního ideálu tamtéž v Tvrzení 7.4.

4. Určete $a, b \in \mathbb{N}$ takové, že $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, resp. $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$. [$a = 6$, $b = 1$]
5. Najděte $a \in \mathbb{N}$ tak, aby ideál $a\mathbb{Z}$ byl roven:
   (a) $28\mathbb{Z} + 63\mathbb{Z}$ [7]
   (b) $15\mathbb{Z} + 18\mathbb{Z} + 40\mathbb{Z}$ [1]
   (c) $(-28)\mathbb{Z} \cap (-63)\mathbb{Z}$ [252]
6. Nechť $R = \mathbb{Z}[i]$. Najděte $a \in R$ takové, že $aR = (5 + 3i)R \cap (13 + 18i)R$. [$a \parallel 31 + 5i$]
7. Ať R je obor hlavních ideálů. Dokažte, že pro zadaná $a, b \in R$ je $aR \cap bR = cR$, kde $c =$NSN(a, b). (Nejdřív si tvrzení zkuste rozmyslet pro $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i]$ a pak případně zobecněte pro libovolný OHI.)
8. Nechť $S = \mathbb{Z}[x]$ a uvažujme ideály $I = 2S + xS$ a $J = 3S + xS$. Ukažte, že:
   (a) I, J nejsou hlavní ideály. [kdyby byly, musely by být generovány dělitelem 2, resp. 3, který, protože jde o vlastní ideály, není invertibilní, tedy jde o ± 2 (resp. ± 3), čímž ale nenageneruji polynom x]
   (b) množina $\{ab \mid a \in I, b \in J\}$ netvoří ideál v okruhu S (Nápověda: přemýšlejte o polynomu $p(x) = x$). [polynom x nelze napsat jako součin ab ze zadání, na druhou stranu zde ale leží, protože $2x, 3x$ jsou daného tvaru součinu a ideál musí být uzavřený na sčítání]

A pro odvážné několik zábavných a zcela dobrovolných příkladů navíc:

Ještě k minulému cvičení:

9.* V $\mathbb{Z}$ řešte soustavu kongruencí

$$\begin{cases} 4^y \equiv 1 \pmod 7 \\ 4y \equiv 3 \pmod 7. \end{cases}$$

[$6 + 21\mathbb{Z}$]

10.* Dokažte, že v $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ jsou $2, \sqrt{13}+3, \sqrt{13}-3$ po dvou neasociované ireducibilní prvky.

A k dnešnímu

11.* Buď s přirozené číslo takové, že $\sqrt{s} \notin \mathbb{N}$.

(a) Předpokládejme, že máme k dispozici $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ taková, že $a + b\sqrt{s}$ je invertibilní prvek v $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$. Ukažte, že je potom množina invertibilních prvků oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$ nekonečná. (Využijte vhodnou vlastnost normy ν.)

(b) Nalezněte dvojici (a, b) hodící se do bodu (1) pro $s = 7$. [Například $a = 8$, $b = 3$.]

12.* Buď $R = \{f \in \mathbb{Q}[x];\ f(0) \in \mathbb{Z}\}$. Pak je R podokruh oboru $\mathbb{Q}[x]$. Dokažte, že pro libovolné $f, g \in R$ existuje $\mathrm{NSD}(f, g)$. Proč není přesto R Gaussovým oborem?

13.* Rozložte polynom $2x^2 + 2x - 1$ nad eukleidovským oborem $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ na ireducibilní prvky.

[$((\sqrt{3}-1)x+1)((\sqrt{3}+1)x-1)$]

14.* Najděte všechna řešení $u, v \in \mathbb{Z}$ rovnice $u^2 + 2209 = v^3$. (Nápověda: $2209 = 47^2$.) [$u = \pm 52$, $v = 17$]