PŘIPOMEŇ: $(R)\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ pro $b<a$; $(R)\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$\boxed{\text{Věta T 7.9}}$ (o derivaci integrálu podle horní meze)

Nechť J je neprázdný interval a $f \in R([\alpha, \beta])$ pro každé $\alpha, \beta \in J$. Nechť $c \in J$ je libovolný pevný bod. Definujme na J funkci $F(x) = (R)\int_c^x f(t)\,dt$.

Pak platí (i) F je spojitá na J,

(ii) Je-li f spojitá v $x_0 \in J$, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důsledky:

(i) f spojitá na (a,b) $\Rightarrow \exists F$ primitivní funkce k f na (a,b).

(ii) f spojitá na $[\alpha, \beta]$, pak

$$(R)\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \lim_{x\to\beta_-} F(x) - \lim_{x\to\alpha_+} F(x) \quad (= F(\beta) - F(\alpha))$$

kde F je primitivní k f na (α, β)

Dk: (i) Nechť $y_0 \in J$ není pravým krajním bodem J.

Chceme dokázat $\lim\limits_{y \to y_0+} F(y) = F(y_0)$.

Nyní $F(y) - F(y_0) = (R)\int_c^y f(t)\,dt - (R)\int_c^{y_0} f(t)\,dt$ $\underline{\text{V 7.8. c)}}$

$$= (R)\int_{y_0}^y f(t)\,dt$$

Riemannovsky integrovatelné fce jsou omez.

$\exists \delta > 0 \ [y_0, y_0+\delta] \subset J \Rightarrow f \in R([y_0, y_0+\delta]) \Rightarrow \exists M > 0$

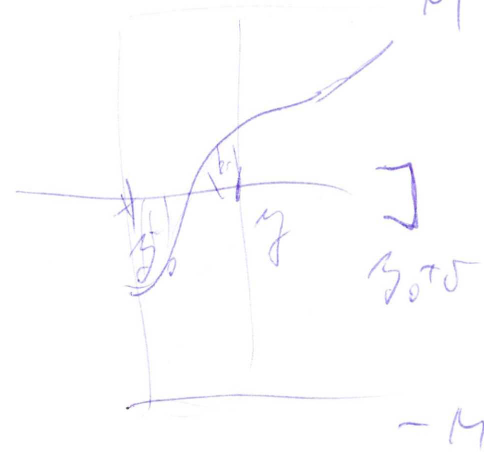
$$-M \le f(x) \le M \qquad \forall x \in [y_0, y_0+\delta]$$

Tedy $-M \cdot (y - y_0) \le (R)\int_{y_0}^y f(t)\,dt \le M \cdot (y - y_0)$ pro $y \in [y_0, y_0+\delta]$

$\downarrow 0 \qquad \downarrow 0 \ (y \to y_0)$

Tedy $\lim\limits_{y \to y_0+} F(y) - F(y_0)$

$$= \lim_{y \to y_0} (R)\int_{y_0}^y f(t)\,dt = 0.$$



Limita z leva lze provést analogicky.

(ii) víme $F'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(R)\int_c^{x_0+h} f(t)\,dt - (R)\int_c^{x_0} f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt.$$

Nyní $\left(\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\right) - f(x_0) = \dfrac{1}{h}\cdot \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ tak, že $\forall t \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ platí $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Pak platí $\forall h$ a $|h| < \delta$ (pak $\forall t \in [x_0, x_0+h]$ platí)

$$-\varepsilon = \frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} -\varepsilon\,dt \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt \le \frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,dt = \varepsilon$$

Tedy podle definice limity funkce

$$F'(x_0) - f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt = 0.$$

$\square$

$$(R)\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \left(F(\beta) - F(\alpha)\right) = \lim_{x\to\beta_-} F(x) - \lim_{x\to\alpha_+} F(x)$$

7.2. Newtonův integrál

Def Řekneme, že funkce f má na intervalu (a,b) Newtonův integrál, jestliže má na (a,b) primitivní funkci F a $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$ jsou vlastní. Hodnotou Newtonova integrálu rozumíme číslo

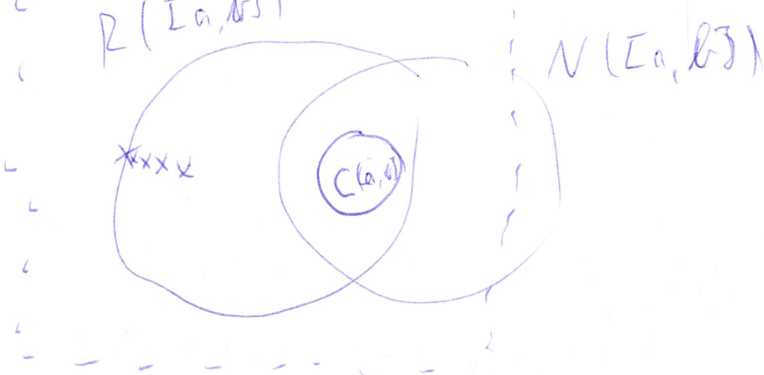
$$(N)\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Množinu funkcí mající Newtonův integrál značíme $N(a,b)$.

Poznámky: 1. Je-li f spojitá na $[a,b]$, pak existují oba integrály a rovnají se $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx$

2. Existuje $(N)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = \lim_{x\to 1-} 2\sqrt{x} - \lim_{x\to 0+} 2\sqrt{x} = 2$, ale $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin R([0,1])$, neboť není omezená

3. Existuje $(R)\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x\,dx$, ale $\operatorname{sgn} x \notin N((-1,1))$, protože $\operatorname{sgn} x$ nemá primit. fci (derivace nabývá mezihodnot V6.4)



Věta L 7.10 (per partes pro určitý integrál)

Nechť f, f', g, g' jsou spojité na intervalu $[a,b]$.

Potom $\int_a^b f(x) g'(x)\,dx = [f\cdot g]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx$, kde

$[fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)\cdot g(a)$ a obecněji $= \lim_{x\to b+} f(x)g(x) - \lim_{x\to a-} f(x)g(x)$

Dk: Víme, že f je primitivní k f' a g je primitivní ke g'.

Tedy pro primitivní funkce platí (V.6.5)

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g = \text{Primit}$$ Dále

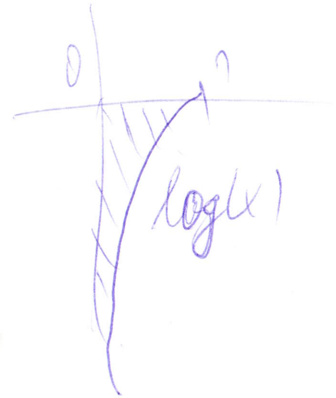
$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = \text{Primit}(b) - \text{Primit}(a) =$$

$$= f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x) g(x)\,dx$$

Všechny integrály existují, neboť to jsou spojité funkce $\square$

Příklad: $\int_0^1 \log x\,dx = \int_0^1 \underbrace{\log x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\,dx =$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = x$



$= [\log x\cdot x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot x\,dx = 0 - \lim_{x\to 0+} \log x\cdot x - 1 = 0 - 1$

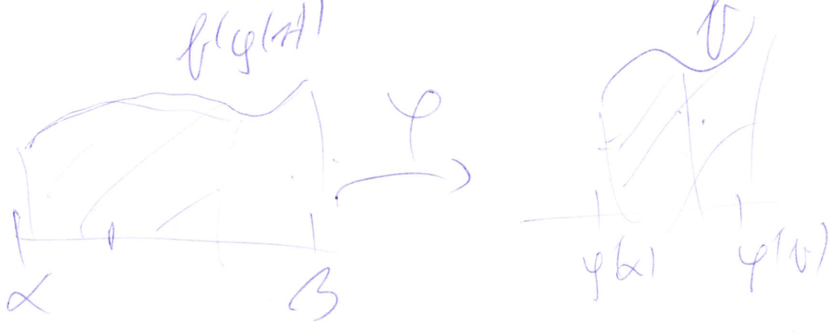
$\left| = \lim \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right| = -1$

$\boxed{\text{Věta BD 7.11}}$ (o substituci pro určitý integrál)

(i) Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ je funkce, která má na $[\alpha,\beta]$ spojitou první derivaci.

Pak $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx$.

(ii)



Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ je na a má na $[\alpha,\beta]$ vlastní spojitou nenulovou derivaci.

Pak $\int_a^b f(x)\, dx = \left[\Phi(\varphi^{-1}(t)) \right]_a^b = \left[\Phi(t) \right]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} =$

$= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$,

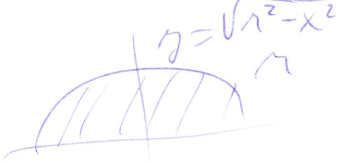
kde Φ je primitivní funkce k $f \circ \varphi \cdot \varphi'$.

Příklady: 1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot \sin x \, dx = -\int_1^0 y^3 \, dy = \int_0^1 y^3 \, dy = \frac{1}{4}$$

$y = \cos x \qquad \frac{dy}{dx} = -(\sin x) \qquad dy = (-\sin x)\cdot dx$

2.



$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx =$$

$t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$x = r \sin t$

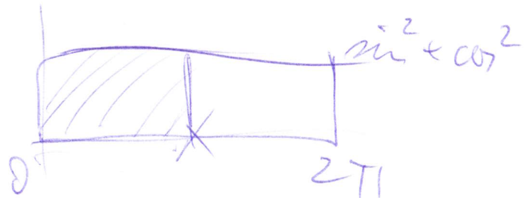
$\frac{dx}{dt} = r \cdot \cos t$

$\sin t : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ prosté a na

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t \, dt =$$

$$= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t \, dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = r^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$\cos^2 t = \left(\frac{1}{2} \pm \cos 2t\right)$



Pozorování: Nechť f je spojitá na (a,b) a ~~a<c~~ $a<c<b$.

Tak (i) $f \in N(a,c)$ a $f \in N(c,b) \Rightarrow f \in N(a,b)$

(ii) $f \in N(a,b) \Rightarrow f \in N(a,c)$

Analogie V 7.8. c)

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to a+} f(x) \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to b-} f(x) \in \mathbb{R}$