ApDR - 5. PŘEDNÁŠKA

MINULE: MODEL SIR

$S(t)$ ... susceptible (náchylní)
$I(t)$ ... infectious (infekční)
$R(t)$ ... removed (uzdravení a mají protilátky a nemohou znovu onemocnět nebo umřeli)

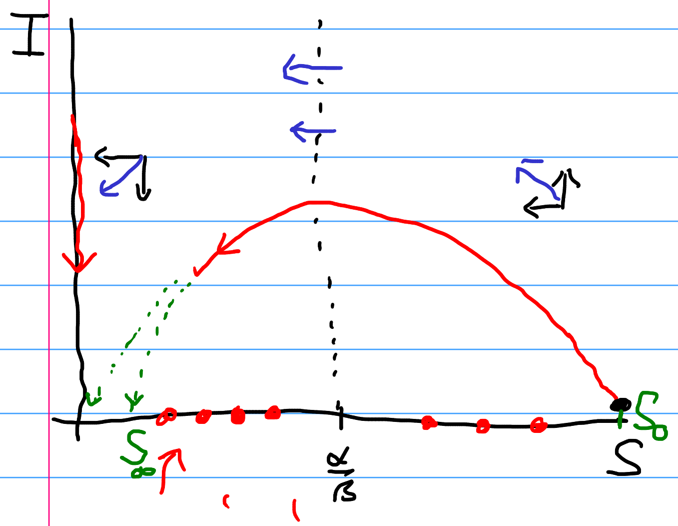
$N(t)$ ... celková populace

$N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. $N(t) = N$ konstantní.

$$\boxed{\begin{aligned} S' &= -\beta S I \\ I' &= \beta S I - \alpha I \\ R' &= \alpha I \end{aligned}}$$

$\beta > 0$ ... nakažlivost nemoci, míra kontaktů

$\alpha > 0$ ... $1/\alpha$ je průměrná doba nemoci



I.1 Model SIR s populační dynamikou

$$\boxed{\begin{aligned} S' &= -\beta I S - \mu S + B \\ I' &= \beta I S - \alpha I - \mu I \\ R' &= \alpha I - \mu R \end{aligned}}.$$

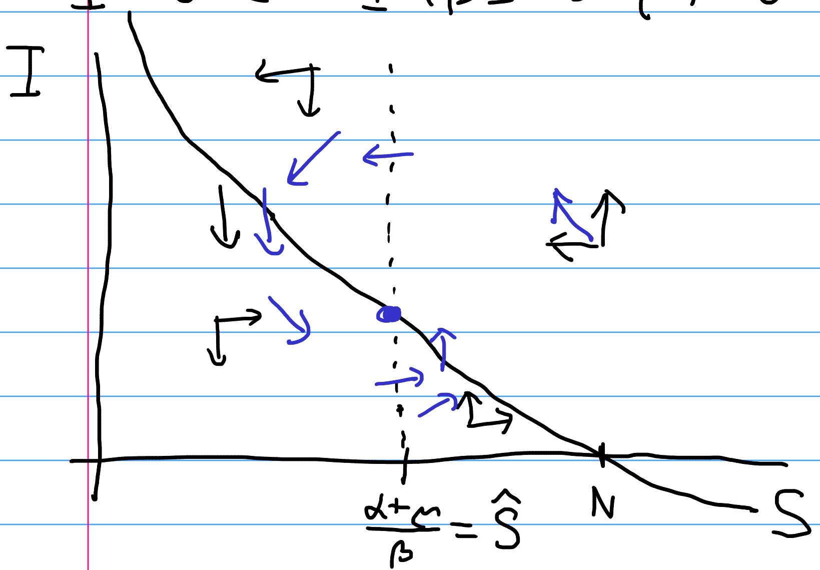
$\mu \geq 0$ úmrtnost

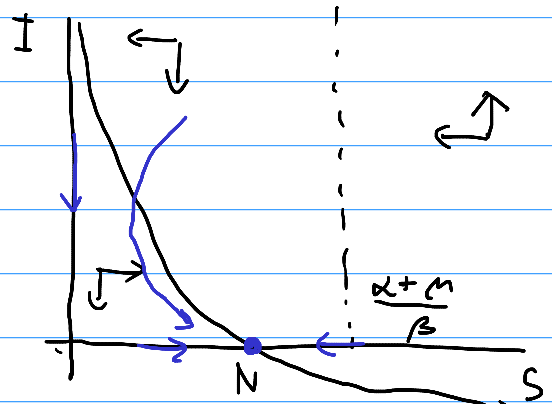
předp. konstantní velikost populace $\mu \cdot \underbrace{N}_{= R+I+S} = B$

Kvalitativní analýza:

$$S' = 0 \iff B = \beta I S + \mu S \iff I = \frac{B - \mu S}{\beta S} = \frac{B}{\beta S} - \frac{\mu}{\beta}$$

$$I' = 0 \iff I(\beta S - \alpha - \mu) = 0 \iff S = \frac{\alpha + \mu}{\beta}$$





při β malém

velké β ... rotace ... periodická řešení či spirála?

Pz: Linearizace na okolí stacionárního bodu má $\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \Rightarrow$ asymptoticky stabilní.

Zkusme spočítat první integrál:

$$S' = -\beta S I - \mu S + B$$
$$I' = \beta S I - \mu I - \alpha I$$

$$S' \cdot (\underbrace{\beta S I - \overset{-\alpha I}{\mu I}}_{\text{o.k}}) = I'(\underbrace{B - \beta S I - \mu S}_{\text{nedokážu odseparovat } S \text{ a } I})$$

TRIK: $B = B\frac{S}{\hat{S}} - \underbrace{B\left(\frac{S}{\hat{S}} - 1\right)}_{\text{zkusme tento člen zanedbat}}$

$$S'\left(\beta S I - \overset{-\alpha I}{\mu I}\right) = I'\left(B\frac{S}{\hat S} - \beta I S - \mu S\right)$$

$$\frac{S'\left(\beta S - \overset{-\alpha}{\mu}\right)}{S} = \frac{I'}{I}\left(\frac{B}{\hat S} - \mu - \beta I\right)$$

$$S'\left(\beta - \frac{\alpha+\mu}{S}\right) = I'\left(\frac{\frac{B}{\hat S}-\mu}{I} - \beta\right) \qquad / \int dt$$

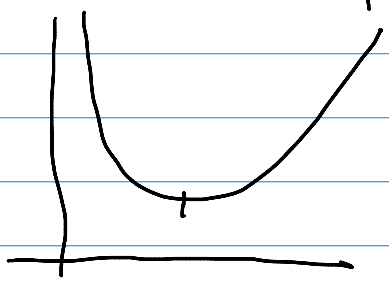
$$\beta S - (\alpha+\mu)\ln S = -\beta I + \left(\frac{B}{\hat S}-\mu\right)\ln I + C$$

integrační konstanta

$$V(S,I) = \beta S - (\alpha+\mu)\ln S + \beta I - \left(\frac{B}{\hat S}-\mu\right)\ln I = C$$

je první integrál ... zůstává konstantní podél řešení. (upravené rovnice)

$$g(S) = \beta S - (\alpha+\mu)\ln S$$



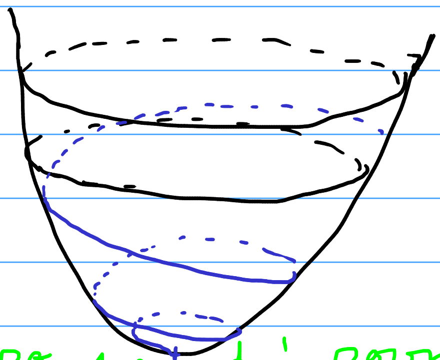
$$\left(\frac{B}{\hat S} - \mu\right) > 0$$

$$B - \mu\hat S > 0 \qquad \frac{B}{\mu} > \hat S$$

$$\frac{B}{\mu} - \hat S > 0 \qquad \frac{B}{\mu} = N \qquad \hat S < N$$

jsme předp.

$V(S,I)$



$$V(S(t), I(t)) = \text{const}$$

počítejme V pro původní rovnici (včetně členu, který jsme předtím zanedbali)

$$\frac{d}{dt}V(S(t), I(t)) = \frac{\partial V}{\partial S}\cdot S' + \frac{\partial V}{\partial I}\cdot I' = \left(\beta - \frac{\alpha+\mu}{S}\right)S' + \left(\beta - \frac{\frac{B}{\hat S}-\mu}{I}\right)I' =$$

řešení původní rovnice

$$= \left(\beta - \frac{\alpha+\mu}{S}\right)\cdot\left(B - \beta S I - \mu S\right) + \left(\beta - \frac{\frac{B}{\hat S}-\mu}{I}\right)\left(\beta S I - \alpha I - \mu I\right)$$

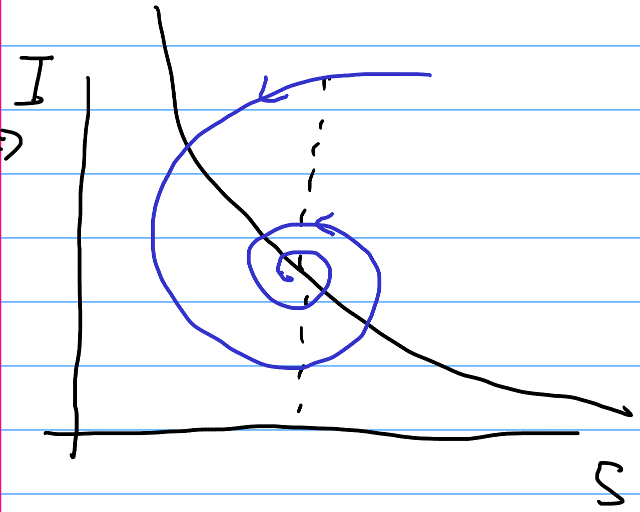
$$= \qquad B = B\frac{S}{\hat S} - B\left(\frac{S}{\hat S} - 1\right)$$

$$\hat{S} = \frac{\alpha+\mu}{\beta}$$

$$= \left(\beta - \frac{\alpha+\mu}{S}\right)\cdot\left(-B\left(\frac{S}{\hat{S}} - 1\right)\right) = \frac{-B}{S\hat{S}}\beta\left(S - \frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)(S-\hat{S})$$

$$= -\frac{B\cdot\beta}{S\hat{S}}(S-\hat{S})^2 \leq 0$$ ... V je Ljapunovská funkce původní

$\Rightarrow$



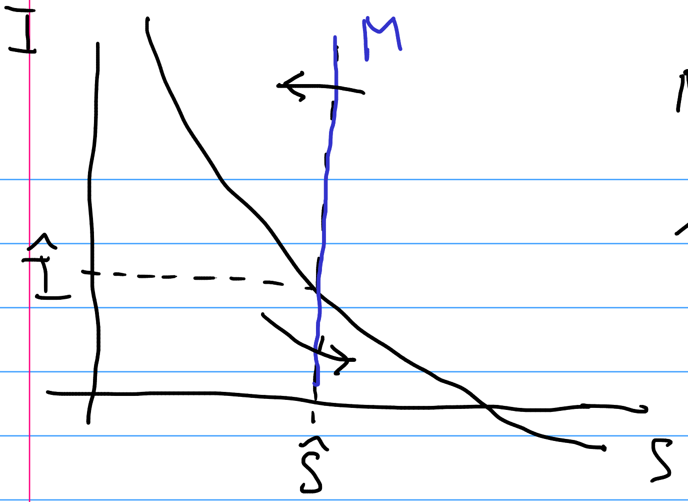
VĚTA: Buď x_0 stacionární bod soustavy $x' = f(x)$, $f: \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ tř. C^1. Nechť $V: \Omega \to \mathbb{R}$ tř. C^1 nabývá ostrého minima v bodě x_0. Pokud $V(x(t))$ je nerostoucí $\forall$ řešení x rovnice $x' = f(x)$, pak x_0 je stabilní stacionární bod.

Pokud navíc $\frac{d}{dt}V(x(t)) < 0$ $\forall x(t) \neq x_0$ $\forall t \Rightarrow x_0$ je asymptoticky stabilní. (as. stabilita neplyne z výpočtu výše) není ostrá nerovnost

Věta (La Salle) dává asymptotickou stabilitu

Buď $\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq 0$ $\forall t$. Buď R je největší podmnožina množiny $M = \{x \in \Omega : \frac{dV(x(t))}{dt} = 0\}$, která je pozitivně invariantní.

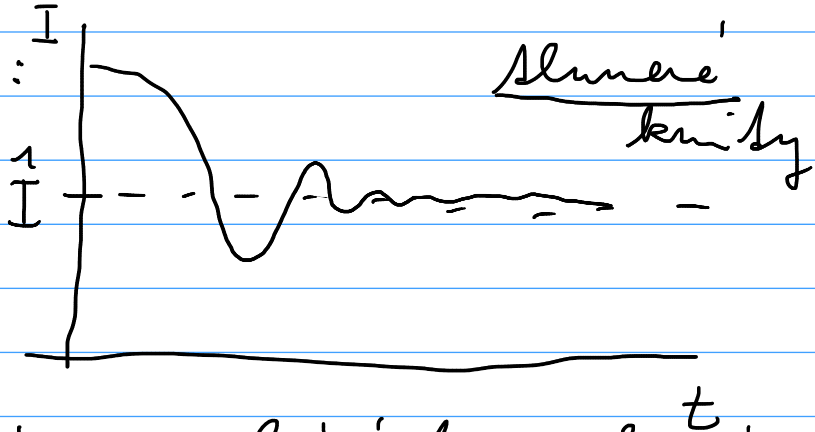
Pokud $R = \{x_0\}$, pak x_0 je globální atraktor na Ω.



Největší pos. invariantní podmnožina M je $\{(\hat{S}, \hat{I})\}$

$\Rightarrow$ tento bod je globálním atraktorem

Zjistili jsme, že časový průběh epidemie vypadá takto:



ZÁVĚR: přidáním populační dynamiky jsme získali opakující se epidemické vlny, avšak jejich velikost se postupně snižuje. Toto neodpovídá pozorovaným faktům u spalniček resp. příušnic v 1. polovině 20. století.

přidáním periodické závislosti β na čase se získá netlumené kmitání!

II.3 Další přihrádkové modely

- SIS ... nezískává se imunita po prodělané nemoci

$$S' = -\beta I S - \mu S + B + f \cdot \alpha I$$
$$I' = \beta I S - \alpha I - \mu I$$
$$R' = (1-f)\alpha I$$

nezáleží

f ... procento uzdravených

– β by měla záviset na velikosti populace „princip masycení"

typicky $\beta(N) = \dfrac{c(N)}{N}$

$$c(N) = \lambda N^{\alpha}, \quad \alpha = 0{,}05$$

funguje dobře ve městech střední velikosti, pro nemoci, které se přenáší kontaktem.

- SEIR ... přidáme přihrádku E ... Exposed ti, co přišli do kontaktu s nakaženým

$$S' = -\beta S I$$
$$E' = \beta S I - \varkappa E$$
$$I' = \varkappa E - \alpha I$$
$$R' = f \alpha I$$

$$N' = -(1-f)\alpha I$$

$\frac{1}{\varkappa}$ střední doba, kdy nemocný nešíří infekci.

Pokud je krátká, tak stav E nemodelujeme. Ale i pokud je delší, tak systém SEIR vykazuje kvalitativně stejné chování jako systém SIR.