

Algebra — cvičení 5

(příklady **čihlovou barvou** jsme dělali on-line, na doma jsou ty ostatní bez hvězdiček)

Ozvěny minulého týdne

1. V \mathbb{Z} řešte soustavu kongruencí: $4^y \equiv 1 \pmod{7}$, $4y \equiv 3 \pmod{7}$.
2. Dokažte, že v $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ jsou $2, \sqrt{13} + 3, \sqrt{13} - 3$ po dvou neasociované ireducibilní prvky.

Standardní příklady

3. Nalezněte v $\mathbb{Z}[i]$ NSD čísel a) $3 + i, 4 + 2i$; b) $3 + 6i, 12 - 3i$; c) $5 + 3i, 13 + 18i$.
4. Najděte $a \in \mathbb{N}$ tak, aby ideál $a\mathbb{Z}$ byl roven: a) $28\mathbb{Z} + 63\mathbb{Z}$; b) $15\mathbb{Z} + 18\mathbb{Z} + 40\mathbb{Z}$; c) $(-28)\mathbb{Z} \cap (-63)\mathbb{Z}$.
5. Nechť $R = \mathbb{Z}[i]$. Najděte $a \in R$ takové, že $aR = (5 + 3i)R \cap (13 + 18i)R$.
6. Vysvětlete následující „rozpor“:
 - (a) V oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ platí $(-2)2 = (i\sqrt{3} + 1)(i\sqrt{3} - 1)$, a proto se nejedná o obor s jednoznačným rozkladem (tj. Gaussův obor).
 - (b) V oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ platí $\sqrt{2}\sqrt{2} = (-4 + 3\sqrt{2})(4 + 3\sqrt{2})$, a přesto se jedná o obor s jednoznačným rozkladem.
7. Nechť $S = \mathbb{Z}[x]$. Uvažujme ideály $I = 2S + xS$ a $J = 3S + xS$. Ukažte, že množina $\{ab; a \in I, b \in J\}$ netvoří ideál v okruhu S . Dokažte také, že I, J nejsou hlavní ideály.

Extra úlohy

- 8* Ať R je obor hlavních ideálů. Dokažte, že pro zadaná $a, b \in R$ je $aR \cap bR = cR$, kde $c = \text{NSN}(a, b)$.
- 9* Buď s přirozené číslo takové, že $\sqrt{s} \notin \mathbb{N}$.
 - (1) Předpokládejme, že máme k dispozici $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ taková, že $a + b\sqrt{s}$ je invertibilní prvek v $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$. Ukažte, že je potom množina invertibilních prvků oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$ nekonečná. (Využijte vhodnou vlastnost normy ν .)
 - (2) Nalezněte dvojici (a, b) hodící se do bodu (1) pro $s = 7$.
- 10* Buď $R = \{f \in \mathbb{Q}[x]; f(0) \in \mathbb{Z}\}$. Pak je R podokruh oboru $\mathbb{Q}[x]$. Dokažte, že pro libovolné $f, g \in R$ existuje NSD(f, g). Proč není přesto R Gaussovým oborem?
- 11* Rozložte polynom $2x^2 + 2x - 1$ nad eukleidovským oborem $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ na ireducibilní prvky.
- 12* Najděte všechna řešení $u, v \in \mathbb{Z}$ rovnice $u^2 + 2209 = v^3$. (Nápověda: $2209 = 47^2$.)