

## Páté cvičení

Matej Lieskovský

**1** Nechť  $X \sim Pois(\lambda)$  a  $Y \sim Pois(\mu)$  jsou nezávislé náhodné veličiny. Dokažte, že pak  $X + Y \sim Pois(\lambda + \mu)$ .

**2** Hodíme třikrát mincí. Označíme  $X$  počet rubů v prvních dvou hodech a  $Y$  počet líců v posledních dvou hodech.

- Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci  $p_{X,Y}$  a také marginální pravděpodobnostní funkce  $p_X, p_Y$ .
- Jsou  $X$  a  $Y$  nezávislé?
- Určete  $P(X < Y)$ .
- Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkce  $p_{X|Y}$ .

**3** Nechť  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ . Ověřte rovnost

$$1 - I_A = \prod_{i=1}^n (1 - I_{A_i}).$$

## Spojité náhodné veličiny

Připomeňte si, že distribuční funkce  $F_X$  je definována vztahem

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Vzpomeňte si, jaké vlastnosti od  $F_X$  požadujeme.

V některých případech je  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$  pro vhodnou nezápornou funkci  $f_X$  (hustotu  $X$ ). Pak je  $P(X \in A) = \int_A f_X(t) dt$ . Platí také  $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt$  a obecněji

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t) dt.$$

Stejně jako pro diskrétní n.v. platí, že  $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ .

- 4** Rozmyslete si, že  $F_X$  nemusí být všude derivovatelná aby  $f_X$  existovalo.
- 5** Najděte  $F_X$  která je všude spojitá ale pro kterou neexistuje  $f_X$ .
- 6** Proč vyžadujeme, aby  $F_X$  byla zprava spojitá?

7 Pro nezávislou veličinu  $X$  s distribuční funkcí  $F_X$  vyjádřete

- $P(X \in (0, 1])$
- $P(X > 0)$
- $P(X < 0)$
- $P(X \in [0, 1])$

## Bonus

**Obsah kruhu náhodným samplováním** Vygenerujeme náhodný bod ve čtverci (obě souřadnice budou mít rozdělení  $U(0, 1)$ ). Označíme  $X_i$  indikátor jevu “ $i$ -tý bod leží ve vepsaném kruhu”.

- Určete  $\mathbb{E}(X_i)$ ,  $\text{var}(X_i)$ .
- Položte  $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ . Určete  $\mathbb{E}(S_n)$  a  $\text{var}(S_n)$ .
- Ukažte, jak lze počítat  $S_n$  z  $S_{n-1}$ ,  $X_n$  a  $n$ .
- Sestavte program v libovolném jazyce a spočítejte pomocí něj hodnotu  $\pi$ . (Jak velké  $n$  myslíte, že bude potřeba pro pět správných číslic?)