ApDR - 4. PŘEDNÁŠKA

MINULE: Model symbiózy

$$x' = x(K-x) + \frac{xy}{y+1}$$
$$y' = -\frac{y}{2} + \frac{xy}{y+1}$$

symbióza

x... populace květiny

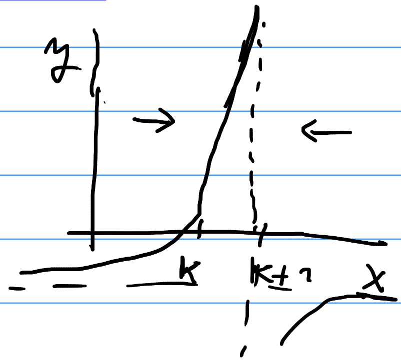
y... populace opylovače

Kvalitativní analýza

$x' > 0 \iff x < k + \frac{y}{y+1}$

$y > -1 - \frac{1}{x-k-1}$

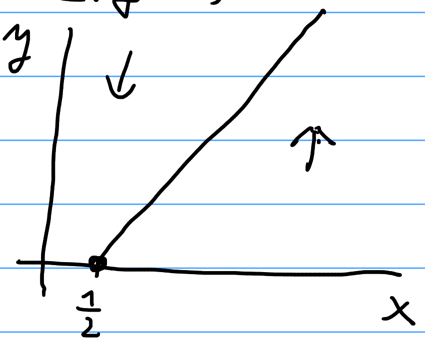
$x < k+1$



$y' > 0 \iff x > \frac{1}{2}(y+1)$

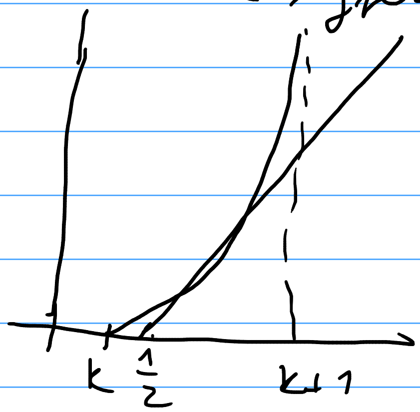
$2x > y+1$

$y < 2x - 1$

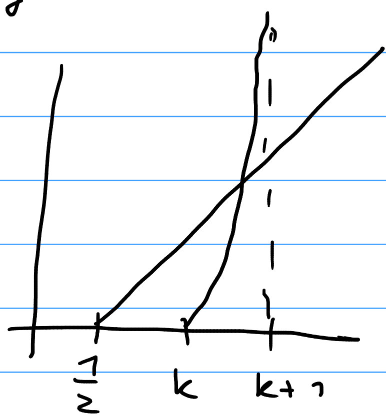


Několik možností vzájemné polohy polopřímky a hyperboly

I.

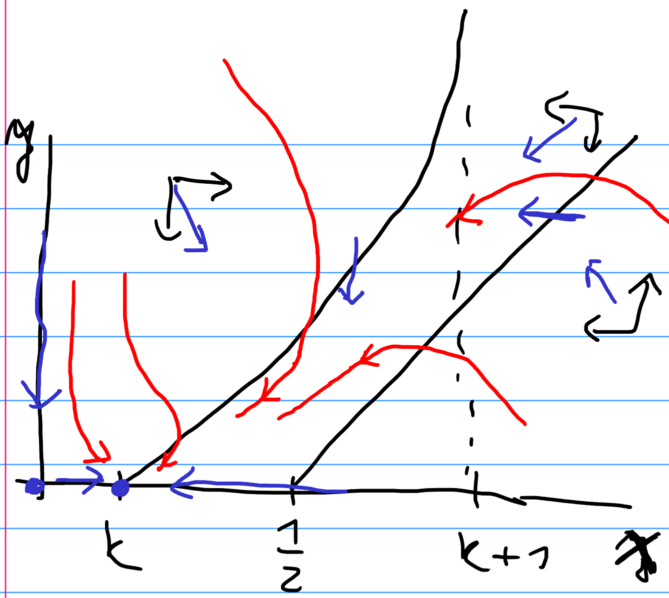


II.



III.

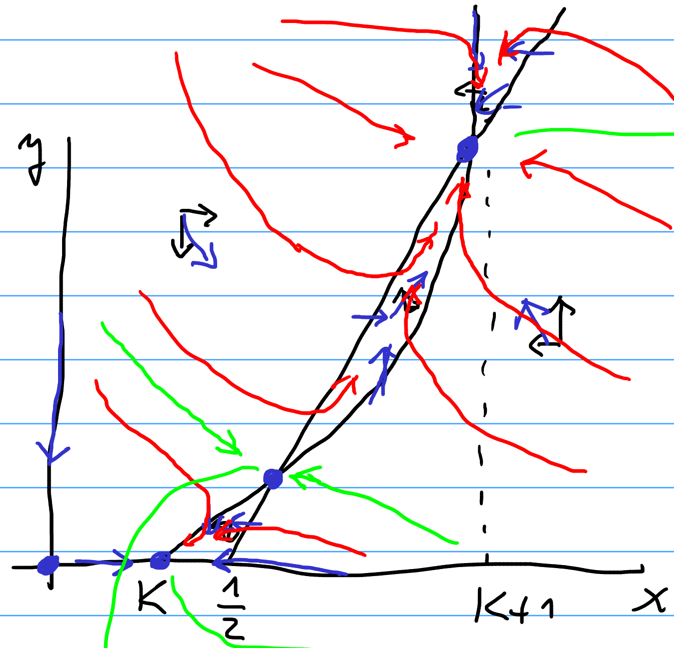
I.



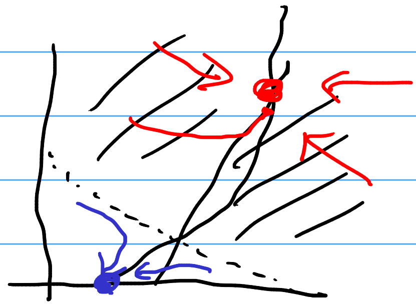
[K,0] je globální atraktor

⇝ opylovač vyhyne, rostlina se ustálí na hodnotě K pro K malé.

II.



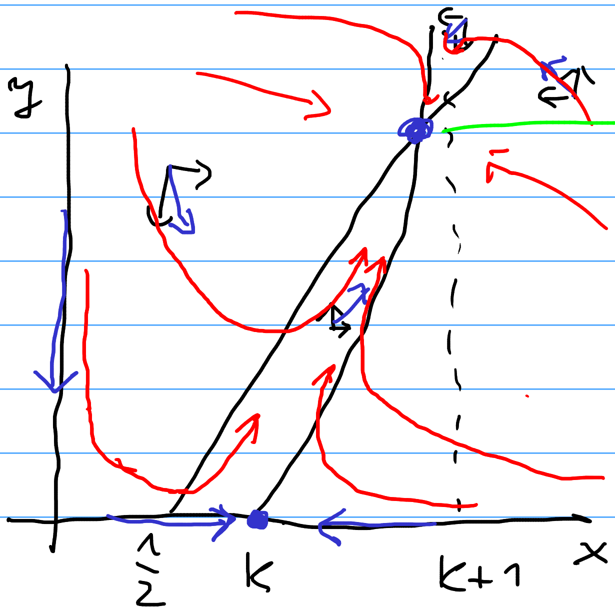
asymptoticky stabilní (atraktor)



[K,0] asymptoticky stabilní

nestabilní stacionární bod

III.



globální atraktor ot. vnitřku kvadrantu

když je kapacita prostředí dost velká, tak opylovač nevyhyne, dojde k symbióze i pro malé počáteční velikosti populací.

II. EPIDEMIOLOGICKÉ MODELY

popisují šíření infekčních nemocí v populacích

II.1 Model SIR

$S(t)$ ... susceptible (náchylní)
$I(t)$ ... infectious (infekční)
$R(t)$ ... removed (uzdravení a mají protilátky a nemohou znovu onemocnět nebo umřeli)

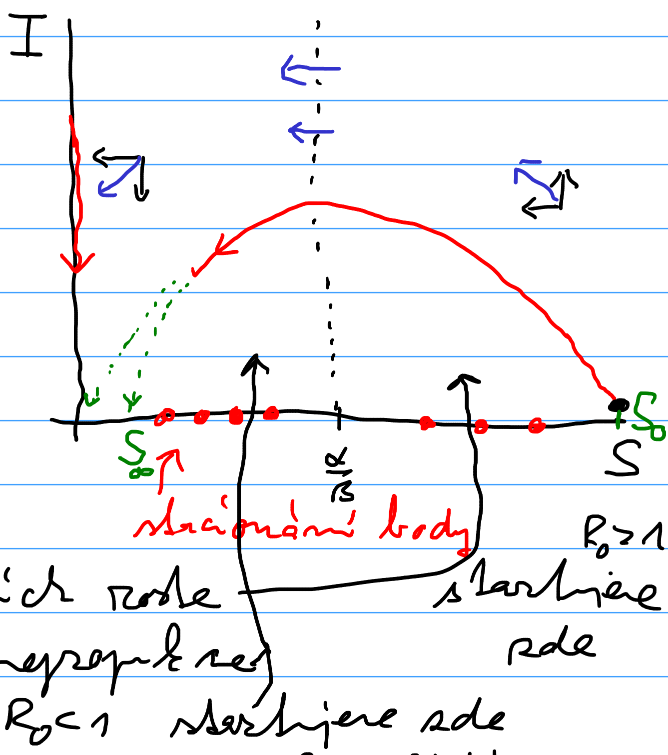
$N(t)$ ... celková populace
$N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. $N(t) = N$ konstantní.

$$\boxed{\begin{aligned} S' &= -\beta S I \\ I' &= \beta S I - \alpha I \\ R' &= \alpha I \end{aligned}}$$

$\beta > 0$ ... nakažlivost nemoci, míra kontaktů
$\alpha > 0$ ... $1/\alpha$ je průměrná doba nemoci

Kvalitativní analýza:

$S' < 0$ vždy
$I' > 0 \iff \beta S - \alpha > 0 \iff$
$\iff S > \frac{\alpha}{\beta}$



$R_0 = S_0 \frac{\beta}{\alpha}$ ... reprodukční číslo
$S_0 = S(0)$

$R_0 > 1 \Rightarrow I' > 0$ ... počet infekčních roste
$R_0 < 1 \Rightarrow I' < 0$ ... epidemie nepropukne

$I' = (\beta S - \alpha)\, I$

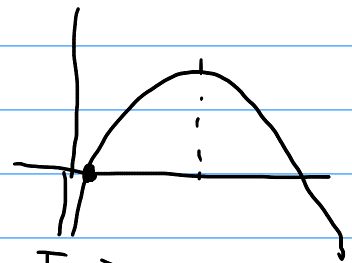
$S_0 - S_\infty$ ... počet lidí, kteří se nakazili

- vypočítáme, zda S_∞ je kladné nebo nulové

$$S'(\beta S-\alpha)\cancel{I} = I'(-\beta S\cancel{I})$$

$$S'\left(1-\frac{\alpha}{\beta S}\right) = -I' \qquad / \int dt$$

$$S - \frac{\alpha}{\beta}\ln S = -I + c$$



$$\underline{I = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\ln(S) - S + c}$$

$S \to +\infty \qquad I \to -\infty$

$S \to 0^+ \qquad I \to -\infty$

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{S} - 1 > 0 \quad \text{pokud } S < \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{S} > 1 \qquad S < \frac{\alpha}{\beta}$$

$S = \frac{\alpha}{\beta}$ ... I nabývá svého maxima

$\Rightarrow$ $\underline{S_\infty > 0}$ (nikdy nulové)

$S_0 - S_\infty$ ... počet lidí, kteří prošli nemocí

$\ln \frac{S_0}{S_\infty}$ ... celková velikost epidemie

vrchol epidemie ... počet infekčních v bodě maxima

Co známe, co neznáme:

známe S_0, I_0

měli bychom vypozorovat α ($\frac{1}{\alpha}$ je průměrná doba trvání nemoci)

S_∞ neznáme ... zjistíme až nakonec

neznáme β ... problém

Víme

$$I_0 + S_0 - \frac{\alpha}{\beta}\ln S_0 = c$$

$$I(1) + S(1) - \frac{\alpha}{\beta}\ln S(1) = c.$$

$\rightsquigarrow$ určíme $\beta, c.$

$V(I,S) = I + S - \frac{\alpha}{\beta}\ln S$ se nazývá 1. integrál funkce V

funkce V zůstává konstantní podél řešení systému

$\cancel{I+S}$ $I = \frac{\alpha}{\beta}\ln S - S + c$

dosadím do 1. rovnice

$$S' = -\beta S I = -\beta S\left(\frac{\alpha}{\beta}\ln S - S + c\right)$$

1 diferenciální rovnice, autonomní

tj. speciálně se separovanými proměnnými

$$\frac{S'}{S\left(\frac{\alpha}{\beta}\ln S - S + c\right)} = -\beta \quad / \int dt$$

integrál neumím $= -\beta t + d$

spočítat

... numericky lze $\rightsquigarrow S(t)$

$\rightsquigarrow$ dopočítám závislost $I(t)$

<u>co model SIR nedokáže zachytit</u>

- periodicky se opakující epidemie (chřipka)
- spalničky ? nové narození