Algebrou proti koronaviru III

Základní příklady

1. Spočítejte

   (a) $100^{99^{98}} \bmod 39$. [1]

   (b) $100^{99^{98}} \bmod 40$. [0]

2. Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující

   (a) $x \equiv 2 \pmod 3$, $x \equiv 4 \pmod 7$ a $x \equiv 3 \pmod 8$. [$168m + 11, m \in \mathbb{Z}$]

   (b) $2x + 1 \equiv 2 \pmod 3$, $3x + 2 \equiv 3 \pmod 4$ a $4x + 3 \equiv 2 \pmod 5$. [$60m + 11, m \in \mathbb{Z}$]

   (c) $10x \equiv 6 \pmod{32}$ a $3x \equiv 1 \pmod 5$. [$80m + 7, m \in \mathbb{Z}$]

3. Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující

   (a) $x^2 \equiv 1 \pmod 3$ a $x^2 \equiv 1 \pmod 7$. [$x = 21m + 1$, $x = 21m + 8$, $x = 21m + 13$ a $x = 21 + 20$, kde $m \in \mathbb{Z}$]

   (b) $x^2 \equiv -1 \pmod{65}$. [$x = 65m + 8$, $x = 65m - 8$, $x = 65m + 18$ a $x = 65m - 18$, kde $m \in \mathbb{Z}$].

Další počítání

4. Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $x^{11} \equiv 2 \pmod 5$ a $x^8 \equiv 1 \pmod 7$. [$x = 35m + 8$ a $x = 35m + 13$, $m \in \mathbb{Z}$]

5. Spočítejte

   (a) $3^{3^{3^{3^{3^{3}}}}} \bmod 28$. [27]

   (b) $3^{5^{7^{9^{11^{13}}}}} \bmod 28$. [19]

6. Dokažte, že 13 dělí $23^{32} + 29^{33} + 36^{34}$.

7. Najděte všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ splňující $x^6 + x + xy \equiv 1 \pmod 7$. [$x \not\equiv 0, y \equiv 6 \pmod 7$]

8. Určete poslední tři cifry čísla 249^{19}. [249]

9. Spočtěte $130^{9^{3^{2021^{123}}}} \bmod 221$. [91]

10. Najděte všechna $x \in \{0, 1, \ldots, 76\}$ splňující $x^2 + 8x \equiv 62 \pmod{77}$. [$30, 39, 72, 74$]

11.* Najděte všechna $x, y, z \in \mathbb{Z}$ splňující $x^2 + y^2 + z^2 = 15w^2$ (návod: řešte nejprve kongruenci modulo 8).

12.* Nechť jsou p, q dvě různá lichá prvočísla.

   (a) Dokažte, že má polynom $x^3 + 3x^2 + 2x$ v okruhu $\mathbb{Z}_{pq}$ právě 9 kořenů.

   (b) Rozhodněte, zda existují $a, b \in \mathbb{Z}_{pq}$, aby měl polynom $x^2 + ax + b$ v okruhu $\mathbb{Z}_{pq}$ právě 3 kořeny.