**Faktorová analýza**

Faktorová analýza vznikla v oblasti psychologie. Za jejího zakladatele je považován Charles Spearman, který v roce 1904 v článku o povaze inteligence navrhl hypotézu o existenci společného faktoru „obecné intelektové schopnosti“, způsobujícího korelace mezi výsledky různých inteligenčních testů. Kromě společného faktoru předpokládal Charles Spearman i řadu specifických faktorů, z nichž každý se uplatňuje jen v rámci daného testu a nekoreluje s ostatními.

O další rozvoj faktorové analýzy se zasloužil L. L. Thurstone, který rozšířil Spearmanův model jediného společného faktoru na model vícefaktorový, a další psychologové, jako R. B. Catell, C. B0,3urt, G. Thomson, ale také statistikové, např. D.N. Lawley, H. Hotelling, M. S. Bartlett, C. R. Rao a další.

Faktorová analýza byla po dlouhou dobu používána téměř výhradně v psychologii. V posledních čtyřiceti letech však v souvislosti s růstem výpočetních možností, v důsledku odstranění některých subjektivních prvků metody a úzce psychometrické interpretace i opuštění původních metod faktorových řešení pronikla faktorová analýza i do dalších oborů - sociologie, zdravotnictví, marketingu a dalších.

Primární funkcí faktorové analýzy je redukce proměnných. Tu lze provést pouze za podmínky vzájemných závislostí proměnných a předpokladu, že tyto závislosti jsou důsledkem působení určitého menšího počtu v pozadí stojících neměřitelných veličin. Tyto veličiny jsou označovány jako faktory.

Techniky faktorové analýzy je možné rozdělit do dvou skupin:

(1) Faktorová analýza *explorační* (*Exploratory factor analysis*) při níž se hledá co nejmenší, ale nijak pevně daný počet faktorů, které by co nejlépe popisovaly chování zkoumaných proměnných. Výsledky explorační faktorové analýzy jsou nejednoznačné.

(2)Faktorová analýza *konfirmační* (*Confirmatory factor analysis*), která se opírá o testy hypotéz, že vztahy mezi proměnnými mohou být vysvětleny určitým modelem faktorů.

Úspěšné použití faktorové analýzy vyžaduje značné předmětné znalosti v aplikační oblasti, respektování předpokladů metody a určité praktické zkušenosti s jejím uplatněním.

Základní myšlenky faktorové analýzy nejsou složité. Jejich matematické odvození ale už tak jednoduché není, využívá postupů maticové algebry. Proto se v textu nelze vyhnout některým termínům maticového počtu. S matematickými definicemi těchto pojmů, stejně jako se základními operacemi s maticemi, se lze seznámit např. ve středoškolských učebnicích, v kapitolách věnovaných řešení soustavy lineárních rovnic. V tomto učebním textu budou matematické vzorce zmíněny jen okrajově, pouze v míře nutné pro pochopení a popis komplexu problémů a postupů s faktorovou analýzou spojených.

Učební text obsahuje teoretickou a praktickou část, která postup faktorové analýzy představuje na konkrétním příkladě.

**1. Explorační faktorová analýza**

**1.1. Základní pojmy**

Explorační faktorová analýza má za cíl analyzovat korelace většího množství měřitelných (manifestních) proměnných a na základě této analýzy určit proměnné, které statisticky „patří k sobě" - tvoří faktory (latentní proměnné). Přitom počet nalezených faktorů by měl být co nejmenší a pozorované závislosti by měly být objasněny co nejjednodušeji. Poté, kdy faktor objevíme a pojmenujeme, můžeme z něj vytvořit novou proměnnou, kterou používáme v další analýze namísto původních položek.

Postup faktorové analýzy je založen na výběrových korelačních a parciálních korelačních koeficientech.

Korelační koeficient vyjadřuje těsnost lineární závislosti proměnných, pohybuje se v rozmezí -1 až 1.

Parciální korelační koeficient vyjadřuje těsnost lineární závislosti dvou proměnných, ovšem za předpokladu, že všechny ostatní proměnné jsou konstantní. Je-li možné závislost proměnných vysvětlit společnými faktory, musí být parciální korelační koeficienty, kde je tento vliv společných faktorů odrušen, velmi malé, v ideálním případě, kdy faktory vysvětlují lineární závislosti proměnných beze zbytku, nulové.

Reprodukovaný korelační koeficient vyjadřuje těsnost lineární závislosti dvou proměnných, které jsou vyjádřeny pomocí odhadnutých faktorů, tj. už na základě výsledků faktorové analýzy.

Reziduální korelační koeficient je dán rozdílem mezi pozorovaným a reprodukovaným korelačním koeficientem. Pokud nalezené faktory dobře vysvětlují korelace mezi manifestními proměnnými, měly by být reziduální korelační koeficienty malé, v ideálním případě nulové. Proto by reziduální korelační matice neměla chybět v žádné výstupní sestavě faktorové analýzy. Pro hrubé posouzení faktorového modelu můžeme například zkontrolovat, zda jsou všechny reziduální korelační koeficienty menší než např. 0,1. Pouhý pohled na rezidua není sice zcela spolehlivý, ale může leccos napovědět. Pokud např. vyšší hodnoty reziduálních korelačních koeficientů vytvářejí shluky, může to napovídat existenci dalších faktorů.

K tomu, abychom mohli faktorovou analýzu provést, potřebujeme mít k dispozici ***n*** pozorování každé z ***k*** manifestních proměnných ***X1 , X2 , X3 … Xk****.* Je třeba si uvědomit, že postup faktorové analýzy nerealizujeme na zkoumaném základním souboru, ale pouze na výběru z tohoto souboru. Proto budou analogicky výsledky faktorové analýzy pouze odhady skutečných faktorů.

Existují-li mezi proměnnými ***X1*** , ***X2*** , ***X3*** …***Xk*** lineární závislosti, budou jejich korelační koeficienty v absolutní hodnotě velké. Pokud bude splněn i další předpoklad faktorové analýzy, že za závislostí proměnných stojí latentní společné proměnné – faktory, budou parciálních korelační koeficienty proměnných ***X1*** , ***X2*** , ***X3*** …***Xk*** velmi malé. Analyzovat matici korelačních a parciálních korelačních koeficientů, abychom zjistili, zda se zkoumané proměnné hodí pro faktorovou analýzu, je pracné a nespolehlivé. Proto se pro posouzení vhodnosti faktorové analýzy používají dva ukazatele.

Nejpoužívanějším je **Kaiser-Meyer-Olkinova** míra (KMO). Koeficient KMO může teoreticky nabývat hodnot mezi 0 a 1. To proto, že je dán podílem součtu druhých mocnin korelačních koeficientů ku součtu druhých mocnin korelačních a parciálních koeficientů koeficientů. Pro hodnoty KMO platí následující tabulka

**Tab. 1 Hodnocení koeficientu KMO**

|  |  |
| --- | --- |
| KMO | Hodnocení KMO |
| 0,9 - 1 | skvělý |
| 0,8 - 0,9 | vysoký |
| 0,7 - 0,8 | střední |
| 0,6 - 0,7 | nízký |
| 0,5 - 0,6 | špatný |
| Do 0,5 | FA nemá smysl |

Další možností, jak jednoduchým způsobem zjistit, zda jsou zkoumané proměnné vhodné pro faktorovou analýzu, je testovat nulovou hypotézu, že korelační matice daných proměnných je jednotková (tj. na diagonále má jedničky, jinde nuly). To znamená, že korelační koeficienty mezi proměnnými jsou nulové, není tedy splněn základní předpoklad pro použití faktorové analýzy. Pokud tuto nulovou hypotézu zamítneme, má faktorová analýza smysl. Pro test této nulové hypotézy se používá **Bartlettův test sféricity**. Při dostatečně velkém počtu pozorování dochází k zamítnutí nulové hypotézy i při relativně malých korelačních koeficientech mezi proměnnými. Proto je vhodnější používat koeficient KMO. Vede k tomu i skutečnost, že Kromě celkového koeficientu KMO lze spočítat KMO i pro jednotlivé proměnné, tj. nejen pro všechny korelační koeficienty, ale také pouze pro korelační koeficienty s danou proměnnou.

KMO pro jednotlivé proměnné můžeme nalézt v tzv. Anti-image matici, tj. v matici záporných parciálních korelačních koeficientů. KMO jednotlivých proměnných jsou uvedeny na diagonále této matice.

Výsledky explorační faktorové analýzy nejsou jednoznačné. To je dáno tím, že existuje celá řada metod extrakce, rotace a výpočtu skóre faktorů.

Faktory jsou zpravidla konstruovány tak, aby byly stochasticky nezávislé, a proto i nekorelované. Stejně jako manifestní proměnné, jsou i faktory standardizované, tj. jejich střední hodnota je 0 a rozptyl 1. Na tomto místě třeba poznamenat, že je možné pracovat i nestandardizovanými proměnnými a jejich kovarianční maticí. V tomto textu se omezíme na standardizované proměnné.

Matematicky lze postup faktorové analýzy popsat jako vyjádření zkoumaných standardizovaných proměnných ***Xi*** pomocí lineární kombinace menšího počtu hypotetických faktorů ***Fj*** následovně

***Xi = ai1F1 + ai2F2 + ai3F3 + + aimFm + ei***, (1)

proi = 1, 2, 3, …k, kde ***k*** je počet manifestních proměnných, *m* počet faktorů a ***ei* specifická (jedinečná, chybová, reziduální)** část proměnné ***Xi*** , o níž předpokládáme, že její korelace se všemi faktory je nulová. Přitom požadujeme ***m < n***.

Nulové jsou i korelace jednotlivých jedinečností mezi sebou. Protože i faktory jsou konstruovány tak, aby spolu vzájemně nekorelovaly, lze rozptyl proměnné ***Xi*** vyjádřit vztahem

***Var(Xi) = Var(ai1F1 + ai2F2 + ai3F3 + + aim4Fm + ei)***

***= Var(ai1F1) + Var(ai2F2) + Var(ai3F3) + + Var(aimFm) + Var(ei).*** (2)

Protože jak manifestní, tak i latentní proměnné jsou standardizovány (tj. mají rozptyl roven 1), platí

***Var(Xi) = ai12 + ai22 + ai32 + + aim42 +Var(ei) = 1.*** (3)

Konstanty aij se nazývají **faktorové zátěže.** Nabývají hodnot mezi -1 a +1 a lze je interpretovat jako korelační koeficienty mezi pozorovanými proměnnými a faktory. Matici faktorových zátěží se říká **faktorová matice**. Součet druhých mocnin faktorových zátěží ***ai12 + ai22 + ai32 + + aim2*** je roven části variability proměnné ***Xi*** vysvětlené všemi faktory ***Fj***. Tento součet se nazývá **komunalita proměnné**. Komunalita proměnné je tedy ta část variability proměnné, která je vysvětlena faktory. Maximální možná hodnota komunality je rovna 1.

Je třeba připomenout, že faktorové zátěže aij jsou pouze odhady skutečných faktorových zátěží.

Je žádoucí, aby komunality nabývaly pokud možno hodnot blízkých 1. To pak svědčí o tom, že je jejich variabilita z velké míry vysvětlena faktorovou analýzou. Část variability proměnné ***Xi***, která nemá vztah k faktorům, ***Var(ei)*** se nazývá **jedinečnost**. Jestliže byla proměnná ***Xi***před zpracováním standardizována, platí, že

***komunalita + jedinečnost = 1***.

V souvislosti s faktorovou analýzou se také setkáváme s pojmem **redukovaná korelační matice**. Je to vlastně korelační matice původních proměnných, na jejíž diagonále jsou jedničky nahrazeny komunalitami.

Jak nejlépe dosáhnout toho, aby komunality dosahovaly maximální možné hodnoty, tj. hodnoty blízké jedné? Teoreticky toho lze dosáhnout tím, že počet faktorů bude roven počtu manifestních proměnných. V tomto případě bude mít pro ***m = k*** soustava lineárních rovnic jednoznačné řešení, tj. k manifestních proměnných bude převedeno na stejný počet faktorů, jedinečnosti ***ei*** budou nulové, nedojde k žádné ztrátě informace a všechny komunality budou rovny jedné. Stejný počet faktorů jako původních proměnných je ale v rozporu s hlavní zásadou faktorové analýzy, že počet faktorů má být menší než počet původních proměnných, jinými slovy, že dojde k redukci proměnných. I kdybychom této zásady nedbali, bylo by plýtváním času snažit se převádět pozorované proměnné na stejný počet jiných proměnných, o jejichž významu by bylo možné pouze spekulovat. Tím se dostáváme k jedné z nejtěžších úloh faktorové analýzy - stanovení počtu faktorů. Jde vlastně o hledání kompromisu, přičemž na jedné straně platí, že čím více faktorů se vypočítá, tím větší procento rozptylu proměnných je vysvětleno. Na druhé straně smyslem faktorové analýzy je nalézt pokud možno co nejmenší přijatelný počet faktorů. Proto je třeba počet hledaných faktorů určovat na základě konkrétních dat. Existuje tu několik možností.

**1.2 Stanovení počtu faktorů**

Poměrně nejjednodušší případ nastává, pokud můžeme na základě znalosti zkoumané látky použít teoretický předpoklad o počtu faktorů. Například u testu inteligence předpoklad o existenci čtyř oblastí kognitivních schopností. Počet faktorů pak stanovíme roven 4.

Další možnosti využívají porovnávání rozptylu faktorů s rozptylem manifestních proměnných. Protože manifestní proměnné bývají standardizovány, jde vlastně o porovnání rozptylu faktorů s hodnotou 1. Do faktorové analýzy jsou zahrnuty ty faktory, jejichž rozptyl je větší než 1. Pokud analyzujeme kovarianční matici, je variantou této metody tzv. Kaiserovo pravidlo, které doporučuje neuvažovat ty hlavní komponenty, jejichž rozptyl je menší než průměrná hodnota z rozptylů všech faktorů. Na tomto místě je pro úplnost poznamenat, že rozptyl faktoru lze matematicky určit jako **vlastní číslo** kovarianční či korelační matice.

Grafickou metodou pro stanovení počtu faktorů je sutinový graf, známý též jako scree plot. Jedná se vlastně o graf vlastních čísel (rozptylů) všech faktorů. Křivka grafu je klesající a mez oddělující vhodný počet faktorů nacházíme tam, kde vidíme nejvyšší pokles vlastních čísel mezi dvěma faktory.

**1.3 Metody extrakce faktorů**

Metody extrakce faktorů jsou vlastně metodami, jak určit počet faktorů a velikost faktorových zátěží, jinými slovy, jak na základě výběru ***n*** osob z určitého základního souboru nejlépe odhadnout ***k.m*** faktorových zátěží ***aij*** (faktorovou matici) a k jedinečnosti ***ei***.

**Metoda hlavních komponent** (principal component ) dává nekorelované faktory, které jsou navíc uspořádány podle svého rozptylu, a to tak, že první faktor má rozptyl největší a poslední nejmenší. Metoda hlavních komponent existuje i samostatně, faktorovou analýzu lze považovat za její rozšíření. Zatímco analýza hlavních komponent se snaží redukovat počet proměnných tak, aby byl co nejlépe objasněn rozptyl původních proměnných, faktorová analýza se pokouší objasnit co nejlépe korelace původních proměnných. Výpočet faktorových zátěží metodou hlavních je jednoznačný, a pokud zvýšíme počet faktorů (komponent), původní komponenty se nezmění. To u ostatních metod extrakce neplatí.

První hlavní komponenta se určuje jako lineární kombinace manifestních proměnných, která má co největší variabilitu za podmínky, že součet druhých mocnin korelačních koeficientů je roven 1. Splnění této podmínky se vyžaduje proto, aby nebylo možné zvětšovat rozptyl pouhým navýšením faktorových zátěží.

Druhá hlavní komponenta se obdobně vypočte jako lineární kombinace manifestních proměnných, která má co největší variabilitu za podmínky, že součet druhých mocnin korelačních koeficientů je roven 1 a která je nekorelovaná s první hlavní komponentou. Tímto způsobem lze získat z k manifestních proměnných k hlavních komponent.

Matematicky lze tento postup popsat jako iterační postup vedoucí ke stanovení m největších vlastních čísel korelační matice a jim odpovídajících vlastních vektorů.

V případě vysokých korelací mezi proměnnými je možné celkový rozptyl zachytit pouze jednou hlavní komponentou. Naopak v případě korelací blízkých nule potřebujeme k vysvětlení celkového rozptylu tolik hlavních komponent, kolik je manifestních proměnných. Rovnice pro vyjádření hlavních komponent pomocí manifestních proměnných se dají obrátit a původní proměnné vyjádřit pomocí hlavních komponent. Přitom lze komponenty s malými rozptyly zanedbat.

Metoda hlavních komponent má tu výhodu, že dává jednoznačné faktorové řešení, kde latentní proměnné vyčerpávají nejvyšší možné procento rozptylu. Proto tato metoda patří mezi nejčastěji používané. Odpůrci této metody namítají, že není metodou, která by nejlépe vysvětlovala korelace manifestních proměnných.

**Metoda hlavních os** (principal-axis) je obdobná metodě hlavních komponent s tím rozdílem, že je matice výběrových korelačních koeficientů nahrazena redukovanou korelační maticí.

**Metoda nejmenších čtverců**

Faktory jsou extrahovány tak, aby byl minimalizován součet čtverců reziduálních korelačních koeficientů, které neleží na diagonále korelační matice.

**Zobecněná metoda nejmenších čtverců**

Metoda extrakce faktorů je obdobná metodě nejmenších čtverců. Faktory jsou extrahovány tak, aby byl minimalizován součet čtverců reziduálních korelačních koeficientů, které neleží na diagonále korelační matice. Reziduální korelační koeficienty jsou přitom převáženy tak, že korelace proměnných, které mají vyšší jedinečnosti mají nižší váhu než korelace proměnných s nižšími jedinečnostmi.

**Metoda maximální věrohodnosti**

Odhad metodou maximální věrohodnosti je velmi rozšířený postup, který za předpokladu normálního rozdělení většinou vede ke stejným výsledkům jako metoda nejmenších čtverců. K pochopení této metody je třeba si uvědomit, že postup faktorové analýzy nerealizujeme na zkoumaném základním souboru, ale pouze na výběru z tohoto souboru. Proto musíme rozlišovat tři typy pojmů. Za prvé to jsou neznámé korelační koeficienty v základním souboru, ke kterým přísluší i neznámé faktorové zátěže a jedinečnosti. Za druhé jsou to jejich odhady a za konkrétní odhady provedené na daném výběru, především výběrové korelační koeficienty ***r ij***.

Základní myšlenka metody maximální věrohodnosti je odhadnout takové parametry základního souboru, pro které je pravděpodobnost, že se vyskytnou u našeho výběrového souboru, největší. Základem výpočtu je při metodě maximální věrohodnosti určení věrohodnostní funkce. Ta se stanoví jako pravděpodobnost výskytu našeho výběru v závislosti na hodnotách parametrů základního souboru. Parametry, pro které nabývá věrohodnostní funkce maxima, jsou maximálně věrohodné odhady.

Pro matematické nalezení maxima věrohodnostní funkce se konstruuje věrohodnostní poměr ***λ***, který je mírou "neshody" odhadu parametrů s danou výběrovou korelační maticí. Tato míra je nezávislá na typu rozdělení a vyjadřuje, nakolik se reziduální korelační koeficienty blíží nule. Pokud je splněn předpoklad normality zkoumaných dat a výběrový soubor je velký, lze navíc dokázat, že věrohodnostní poměr ***λ*** má rozdělení ***χ2*** s počtem stupňů volnosti

***df = ½ [(n - m)2 - (n + m)].***

Metodu maximální věrohodnosti můžeme použít i bez předpokladu normality. Jestliže je splněn požadavek normality, můžeme použít test, zda má věrohodnostní poměr ***λ*** skutečně rozdělení ***χ2.*** Pokud se prokáže, že věrohodnostní poměr ***λ*** nelze pokládat za veličinu s daným rozdělením ***χ2***, většinou upravujeme model faktorové analýzy přidáním dalšího faktoru.

**Metoda alpha** předpokládá, že proměnné, ne případy pocházejí z výběru.

**Image factoring** -společná část proměnné je definována jako lineární regrese zbývajících proměnných.

**1.4 Rotace faktorů**

Bez ohledu na metodu extrakce faktorů existuje nekonečně mnoho faktorových řešení. Znamená to, že ke každému odhadu faktorových zátěží existuje nekonečně mnoho dalších alternativ, které vystihují data stejně dobře. Proto se ve druhé fázi faktorové analýzy faktory transformují tak, abychom je mohli co nejlépe interpretovat. Praxe přitom ukázala, že nejlépe se interpretují takové faktory, jejichž faktorové zátěže nabývají hodnot blízkých buď jedné, nebo nule. To znamená, že každá manifestní proměnná je silně korelována jen s některými faktory a s ostatními faktory je korelována slabě. Tato fáze faktorové analýzy se nazývá rotace faktorů. Název "rotace" se ujal proto, že pro 2 faktory si tuto operaci můžeme představit jako pootočení, tj. rotaci souřadnicových os. To lze ilustrovat např. na následujícím příkladu:

Představme si faktorové řešení ve tvaru

***X1 = 0,5 F1 + 0,5 F2***

***X2 = 0,5 F1 – 0,4 F2***

***X3 = 0,7 F1 + 0,6 F2***

***X4 = -0,6 F1 + 0,5 F2***

Toto faktorové řešení je zobrazeno na obr. 1. Souřadnicové osy F1 a F2 jsou zobrazeny černě, původní faktorové zátěže zeleně. Pootočíme-li faktory F1 a F2 o 45˚, získáme nové souřadnicové osy F1' a F2', faktorové zátěže jsou po rotaci označeny oranžově. Vidíme, že po rotaci skutečně došlo k tomu, že některé faktorové zátěže jsou prakticky nulové nebo nule blízké. Rotované faktorové řešení má přibližně tvar

***X1 = 0,71 F1' + 0,00 F2'***

***X2 = 0,07 F1' – 0,58 F2'***

***X3 = 0,92 F1' – 0,07 F2'***

***X4 = -0,08 F1' + 0,78 F2'***

**Obr. 1**



Vidíme, že první faktor je po rotaci sycen pouze proměnnými X1 a X3, druhý pak X2 a X4. Přitom před rotací byly oba faktory syceny všemi čtyřmi proměnnými.

Pojem rotace úzce souvisí s představou **jednoduché struktury matice** faktorových zátěží. Matice faktorových zátěží má jednoduchou strukturu když:

- Každý řádek obsahuje nejméně jednu zátěž blízkou nule.

- Každý sloupec obsahuje nejméně tolik malých zátěží, kolik je faktorů.

- Pro každou dvojici sloupců existuje alespoň tolik dvojic proměnných, z nichž jedna má malou zátěž u jednoho faktoru a druhá velkou zátěž u druhého faktoru, kolik je společných faktorů.

Tato definice jednoduché struktury matice zátěží není přesná, protože v ní není specifikováno, co je to faktorová zátěž blízká nule, malá a velká. V praxi ale s touto definicí vystačíme. Pokud bychom se pohybovali v teoretické rovině, musely by být výrazy "blízká nule" a "malá" nahrazeny slovem "nulová" a výraz "velká" slovem nenulová. V praxi ale těžko získáme nulové faktorové zátěže.

Zvykem je uvažovat faktorové zátěže v absolutní hodnotě menší než 0,3 jako „blízké nule“, a za „velké“ uvažovat faktorové zátěže v absolutní hodnotě větší než 0,5.

Zvláštním případem jednoduché struktury matice faktorových zátěží jsou **nezávislé shluky**, kdy každá proměnná má nenulovou zátěž pouze u jednoho faktoru. Princip jednoduché struktury matice faktorových zátěží zdůvodnil Thurstone tím, že k řešení kognitivních úloh nepoužíváme všechny naše schopnosti současně. Přijatelnost požadavku jednoduché struktury je tedy možná dána spíše způsobem lidského myšlení než povahou zkoumaných dat.

Pro rotaci faktorů bylo navrženo mnoho metod, z nichž většina je založena na tzv. simplicitní funkci, která je funkcí všech prvků matice faktorových zátěží. Ta je zkonstruována tak, aby nabývala maxima nebo minima při přiměřené aproximaci jednoduché struktury. Bylo vytvořeno několik variant simplicitních funkcí, přičemž metody na nich založené dávajících odlišná řešení. Nadto je těžké stanovit, která implicitní funkce je obecně nejlepší. Zůstává proto jenom na výzkumníkovi, kterou z metod použije. Rozhodování má přitom několik fází.

Prvním krokem je rozhodnutí mezi pravoúhlou (ortogonální) a šikmou rotací. Pravoúhlou rotaci si můžeme představit jako pootočení všech os o stejný úhel, což poskytne řešení s nekorelovanými faktory. Hlavním důvodem pro použití ortogonální rotace je pojetí, ve kterém se předpokládá, že latentní proměnné by měly být jakési základní, nezávislé a tedy i nekorelované proměnné.

V šikmém řešení dostáváme faktory korelované, což mnohdy lépe odpovídá realitě. Například testy kognitivních schopností mají tendenci spolu kladně korelovat a poskytovat jeden generální faktor - všeobecnou inteligenci. U kosé rotace je ale situace komplikovanější, můžeme získat dvě matice faktorových zátěží – jednak tzv. faktorový vzor, obsahující regresní koeficienty proměnných na faktorech, jednak tzv. faktorovou strukturu, která obsahuje koeficienty korelace. Při ortogonální rotaci jsou tyto dvě matice totožné. Pro interpretaci faktorů u šikmé rotace používáme matici faktorové struktury.

Jednotlivé metody rotace popíšeme v pořadí od nejčastěji používaných (a pro interpretaci faktorů nejméně záludných).

**Varimax** je ortogonální rotace, která minimalizuje počet proměnných, které mají vysoké zátěže s každým společným faktorem. Lze o ní mluvit jako o metodě zjednodušující faktory. Simplicitní funkce tu je dána součtem rozptylů čtverců faktorových zátěží v jednotlivých sloupcích. Protože faktory s malým počtem vysokých zátěží u proměnných se snáze interpretují, je tato metoda nejvhodnější pro začátečníky, protože pro interpretaci faktorů vyžaduje relativně nejmenší zkušenosti. Tato metoda má tendenci nevytvářet jeden všeobecný faktor.

**Quartimax** je ortogonální rotace, která minimalizuje počet faktorů, kterých je potřeba pro vysvětlení jednotlivých proměnných. Simplicitní funkce tu je dána součtem rozptylů čtverců faktorových zátěží v jednotlivých řádcích. Lze o ní mluvit jako o metodě zjednodušující proměnné, má tedy tendenci ponechávat jeden všeobecný faktor.

**Equamax** je kombinace metody Varimax a Quartimax. Je při ní minimalizován jak počet proměnných, které mají vysoké zátěže s každým společným faktorem, tak počet faktorů, kterých je potřeba pro vysvětlení jednotlivých proměnných. Jedná se o ortogonální rotaci.

**Oblimin** je šikmá rotace pomocí které se dosahuje jednodušší struktury faktorů než by bylo možné u ortogonální rotace. Využívá se především tam, kde z povahy zkoumaných dat a výsledných faktorů je zřejmé, že faktory pravděpodobně nemohou být nezávislé.

**Promax** je šikmá rotace, vhodná pro stejný typ dat a faktorů jako metoda oblimin. Na rozdíl od metody oblimin je rychlejší, proto se používá především pro velké soubory dat.

Matice rotovaných faktorových zátěží bývá následována maticí koeficientů ***dij***, které udávají podobu konkrétní lineární transformace vedoucí k převodu původních faktorů ***Fi*** na rotované faktory ***Fi'***. Pro koeficienty ***dij*** platí

***Fi' = di1F1 + di2F2 + di3F3 + + dimFm***

pro ***i = 1, 2, 3, … m.***

**1.4 Interpretace faktorů**

Všeobecná praxe při interpretaci faktorů spočívá v tom, že popisujeme faktor jako něco, co je obsahově společné s těmi proměnnými, které mají u tohoto faktoru vysoké faktorové zátěže. Není vhodné se ptát, co mají společného proměnné s nulovými zátěžemi. Ten, kdo provádí interpretaci, se tedy táže, co má skupina proměnných s vysokými faktorovými zátěžemi společného, aby se pokusil daný faktor určit. Pokud se vyskytnou vysoké záporné zátěže, je možné si je představit jako skórované na opačné škále. Takovou opačně skórovanou škálou je například známkování ve škole. Na rozdíl od téměř všech typů testů, jejichž skóre stoupá se stoupajícím výkonem či schopností, známka se stoupajícím výkonem klesá. Je proto například pravidlem, že je-li výsledkem faktorové analýzy faktor s vysokými faktorovými zátěžemi u didaktických testů, testů schopností a známkou, mají faktorové zátěže u testů opačné znaménko než faktorová zátěž u známky.

Při interpretaci faktorů je třeba být opatrný a zamýšlet se nad tím, zda za pojmenováním faktoru skutečně stojí jeho reálná existence. Je třeba si uvědomit, že názvy faktorů jsou pouze pokusy stručně vystihnout jejich podstatu.

**1.5 Faktorová skóre**

Závěrečnou etapou faktorové analýzy bývá odhad faktorového skóre, tj. stanovení hodnoty společných faktorů ***F1, F2, F3 ,… Fm*** pro každého z ***n*** pozorovaných jedinců. Faktorová skóre slouží jednak jako charakteristika sledovaných jedinců, jednak jako umělé proměnné pro další analýzy.

Na první pohled je jasné, že stejně jako není jednoznačně určeno faktorové řešení, nelze jednoznačně určit ani faktorová skóre. Pokud se spokojíme s hrubými odhady, můžeme si faktorová skóre u každého jedince představit jednoduše jako součet skóre těch manifestních proměnných, které sytí daný faktor, popřípadě pro upřesnění využít výsledků faktorové analýzy a skóre manifestních proměnných vynásobit (vážit) příslušnými faktorovými zátěžemi. V praxi se používají přesnější matematické metody, které zohledňují nejen faktorové zátěže, ale i rozptyly jedinečností. Nejpoužívanějšími metodami odhadu faktorových skóre jsou regresní metoda a zobecněná metoda nejmenších čtverců. Společným znakem obou těchto metod je, že faktorová skóre lze počítat z rotovaného i nerotovaného faktorového řešení podle stejného vzorce. Častěji se ale používá rotované faktorové řešení.

**Regresní metoda** získala svůj název na základě následující úvahy: Ve faktorovém modelu (1) známe regresní váhy ***k*** manifestních proměnných na ***m*** společných faktorech spolu s jejich rezidui. Je celkem přirozené se ptát, zda je možné role závislých a nezávislých proměnných vyměnit a odhadovat faktory ***F1, F2, F3 ,…Fm*** na základě jejich regrese na manifestních proměnných ***X1*** , ***X2*** , ***X3*** …***Xk***. Regresní koeficienty faktorů na proměnných jsou přitom různé od regresních koeficientů proměnných na faktorech, tj. faktorových zátěžích.

Odhady faktorových skóre získané regresní metodou nejsou nestranné a nekorelované. To znamená, že i v případě nekorelovaných standardizovaných faktorů (tj. se střední hodnotou 0), mohou být střední hodnoty odhadů faktorů různé od nuly a jejich korelační koeficienty různé od nuly. V praxi bývají odchylky od nuly jak u středních hodnot, tak u korelačních koeficientů malé a většinou není třeba se jimi znepokojovat. Tento nedostatek regresní metody je více než vyvážen skutečností, že matematicky platí, že korelace regresních odhadů s faktory v daném základním souboru, jsou nejvyšší ze všech možných odhadů faktorových skóre.

Jiná situace nastává, jestliže nás zajímáodhad faktorového skóre u vybrané osoby. Tady by se vychýlenost odhadu mohla ukázat jako nežádoucí a může být vhodnější použít druhou z nejpoužívanějších metod odhadu faktorových skóre.

**Zobecněná metoda nejmenších čtverců** je založena na minimalizaci součtu čtverců vážených reziduí, tj. součtu podílů čtverců reziduí ku jejich jedinečnostem. Protože každé reziduum lze podle (1) vyjádřit jako lineární funkci latentních a manifestní proměnné, znamená to vlastně najít takové odhady latentních proměnných, které tento součet čtverců minimalizují. Odhady získané zobecněnou metodou nejmenších čtverců mají menší korelace se skutečnými faktory než regresní odhady. Podobně jako regresní odhady jsou navzájem korelovány, i když faktory korelovány nejsou. Korelovány jsou ale pouze s těmi faktory, k jejichž odhadu slouží. Korelace s ostatními faktory jsou na rozdíl od regresních odhadů nulové. Největší výhodou odhadů faktorových skóre zobecněnou metodou nejmenších čtverců je jejich nestrannost. Navíc za předpokladu normálního rozdělení umožňují stanovit pro odhad skutečných hodnot faktorů intervaly spolehlivosti.