Lambda Kalkul

JR

Úvod

- Church (1936) dokázal nerozhodnutelnost konvertibility λ-termů; první případ dokazatelně nerekurzivní relace
- netypovaný λ-kalkul umožňuje konstrukci termů tvaru FF, intuitivně aplikaci funkce na sama sebe.
- paradigma funkce nikoli jako množiny uspořádaných dvojic (funkce shodující se na každém argumentu v jeho hodnotě jsou stejné), ale jako metody výpočtu (dvě funkce mohou pro stejné argumenty dávat stejné hodnoty, přitom však jde o různé λ-termy popisující odlišné výpočty)

Syntax - termy

Veškeré objekty jsou **termy**

- $\texttt{Var} = v_1, v_2, ...$
- aplikace: (MN)
- λ-abstrakce: $\lambda x.M$

$$\texttt{Term = Var | TermTerm | } \lambda x.\texttt{Term}$$

Do základního jazyka je ještě možné přidat symboly pro konstanty.
Proměnné se značí $x, y, z, ...$, libovolné λ-termy $M, N, L, ...$

Syntax - zakladní definice

- konvence pro zápis termů

$$\lambda xyz.xxyz \text{ značí term } (\lambda x(\lambda y(\lambda z(((xx)y)z))))$$

- v termu $\lambda x.yxx$ ma proměnná y volný výskyt, oba výskyty x jsou vázané
- kombinátor je uzavřený term
- $M \equiv N$, pokud M a N jsou syntakticky stejné, případně až na přejmenování vázaných proměnných

Příklady termů

- `id`
$$\lambda x.x$$
- `app`
$$\lambda fx.fx$$
- `comp`
$$\lambda gfx.g(fx)$$
- `selfapp`
$$\lambda x.xx$$

Syntax - substituce

Definice

Výsledek *substituce* termu N za všechny volné výskyty proměnné x v termu M se značí $M[x := N]$ a je definován následovně:

$$\begin{aligned}
x[x := N] &\equiv N \\
y[x := N] &\equiv y, \text{ pro } y \not\equiv x \\
(PQ)[x := N] &\equiv (P[x := N])(Q[x := N]) \\
(\lambda y.P)[x := N] &\equiv \lambda y.(P[x := N]), \text{pro } y \not\equiv x \\
(\lambda x.P)[x := N] &\equiv \lambda x.P
\end{aligned}$$

λ-kalkul jako rovnostní teorie

- β-konverze

$$(\lambda x.M)N = M[x := N] \tag{β}$$

- rovnost je ekvivalence

$$M = M$$

$$M = N \Rightarrow N = M$$

$$M = N, N = L \Rightarrow M = L$$

- rovnost je kongruence

$$M = N \Rightarrow MX = NX$$

$$M = N \Rightarrow XM = XN$$

$$M = N \Rightarrow \lambda x.M = \lambda x.N$$

Pár základních kombinátorů

(i) Identita ... $\mathbf{I} = \lambda x.x$

$$\mathbf{I}M = (\lambda x.x)M = M$$

(ii) True ... $\mathbf{K} = \lambda xy.x$

$$\mathbf{K}MN = (\lambda xy.x)MN = (\lambda y.M)N = M$$

(iii) False ... $\mathbf{K*} = \lambda xy.y$

$$\mathbf{K*}MN = (\lambda xy.y)MN = (\lambda y.y)N = N$$

Příklad

Uspořádanou dvojici lze definovat jako $[M, N] \equiv \lambda z.zMN$.

$$[M, N]\,True = True MN = M$$

$$[M, N]\,False = False MN = N$$

Kombinátor pevného bodu

Definice

X je *pevný bod* termu (funkce) F, jestliže

$$\lambda \vdash FX = X$$

Věta o pevném bodě

$$\forall F \exists X (\lambda \vdash FX = X)$$

Existence kombinátoru pevného bodu

$$\exists G \forall F (\lambda \vdash F(GF) = GF)$$

Kombinátor pevného bodu

Důkaz věty o pevném bodě

Nechť

$$X = (\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx))$$

Potom

$$X = (\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx)) = F((\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx))) = FX$$

Curryho kombinátor

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)) \\
\mathbf{Y}F &= (\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx)) \\
&= F((\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx))) \\
&= F((\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))F) \\
&= F(\mathbf{Y}F)
\end{aligned}$$

Počítání s Curryho kombinátorem

$\exists F \forall X (FX = XF)$

$$\begin{aligned} F &= \mathbf{Y}(\lambda fx.xf) \\ &= (\lambda fx.xf)F \\ &= \lambda x.xF, \text{ tedy} \\ FX &= XF \end{aligned}$$

$\exists F \forall X (FX = FXX)$

$$\begin{aligned} F &= \mathbf{Y}(\lambda fx.fxx) \\ &= (\lambda fx.fxx)F \\ &= \lambda x.Fxx, \text{ tedy} \\ FX &= FXX \end{aligned}$$

β-redukce

- z rovnosti

$$(\lambda x.M)N = M[x := N] \tag{β}$$

  nás zajimá hlavně $\Rightarrow$, tomu budeme říkat β-redukce
- levá strana rovnosti se nazývá *redex* (reducible expression)
- například

$$(\lambda x.x + 5)6 = 6 + 5$$

  se čte jako "6+5 je výsledek výpočtu $(\lambda x.x + 5)6$" a ne naopak

Kompatibilní relace

Definice

Binarní relace R na λ-termech je *kompatibilní*, jestliže platí

$$MRN \Rightarrow (ZM)R(ZN)$$
$$MRN \Rightarrow (MZ)R(NZ)$$
$$MRN \Rightarrow (\lambda x.M)R(\lambda x.N)$$

Tedy R je kompatibilní vzhledem k aplikaci a λ-abstrakci

Definice

1. *Kongruence* je kompatibilní ekvivalence
2. *Redukce* je kompatibilní, reflexivní a tranzitivní relace

Redukce a konvertibilita

Definice

(i) *(jednokroková, one-step) β-redukce* $\rightarrow_\beta$

$$(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M[x := N]$$

a $\rightarrow_\beta$ je kompatibilní vzhledem k aplikaci a λ-abstrakci

(ii) *(vícekroková) β-redukce* $\twoheadrightarrow_\beta$ je reflexivním a tranzitivním uzávěrem $\rightarrow_\beta$

(iii) *β-konvertibilita* $=_\beta$ je nejmenší ekvivalence obsahující $\rightarrow_\beta$

Z definice $\twoheadrightarrow_\beta$ je redukce a $=_\beta$ je kongruence.

Příklady

- $(\lambda xy.xy)MN \twoheadrightarrow_\beta MN$, protože $(\lambda xy.xy)MN \rightarrow_\beta (\lambda y.My)N \rightarrow_\beta MN$
- $(\lambda x.x + 5)6 \twoheadrightarrow_\beta 11$, ale nikoli naopak
- $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightarrow_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightarrow_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)...$

Pozorování

$$M =_\beta N \Leftrightarrow \lambda \vdash M = N$$

Normální forma

Definice

λ-term je v *β-normální formě*, pokud nemá podterm tvaru $(\lambda x.M)N$, tedy pokud neobsahuje β-redex jako podterm.

E.g. $\mathbf{K} = \lambda xy.x$ je v NF, $\mathbf{Y} = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ není v NF.

Definice

λ-term *M má β-normální formu*, pokud existuje N takové, že $M =_\beta N$ a N je v β-normální formě.

E.g. $\mathbf{IK}$ má NF, protože $\mathbf{IK} \to_\beta \mathbf{K}$.

Church-Rosserova vlastnost

Věta

Pokud $M \twoheadrightarrow_\beta N_1$ a $M \twoheadrightarrow_\beta N_2$, potom existuje N, $N_1 \twoheadrightarrow_\beta N$ a $N_2 \twoheadrightarrow_\beta N$. Jinými slovy, pro každé dva redukty termu M existuje jejich společný redukt.

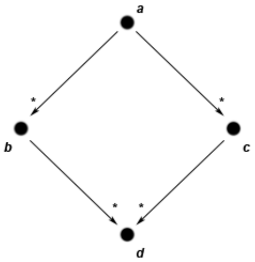

Figure 1: Church-Rosserova vlastnost (obrázek z německé wiki)

Důsledky Church-Rosserovy vlastnosti

Nejdřív se indukcí ukáže, že β-konvertibilní termy mají společný redukt. (Church-Rosser se využije u tranzitivity.) Z toho plyne následující:

Jedinečnost normální formy

Každý λ-term má maximálně jednu β-normální formu.

Bezespornost λ-kalkulu

$\lambda \nvdash M = N$ pro nějaké M a N.
Kdyby platilo $\lambda \vdash \mathbf{K} = \mathbf{K*}$, potom $\mathbf{K} =_\beta \mathbf{K*}$, z Church-Rossera mají $\mathbf{K}$ a $\mathbf{K*}$ společný redukt. Spor s tím, že $\mathbf{K}$ a $\mathbf{K*}$ jsou dvě odlišné normální formy.

Existují termy bez β-normální formy

$\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ není v β-NF a redukuje pouze na sebe sama.

Příklady

(i)

$$(\lambda x(\lambda y.xy)a)b \to_\beta (\lambda y.by)a \to_\beta ba$$

$$(\lambda x(\lambda y.xy)a)b \to_\beta (\lambda x.xa)b \to_\beta ba$$

(ii)

$$\mathbf{K}\Omega\mathbf{I} \to_\beta (\lambda y.\Omega)\mathbf{I} \to_\beta \Omega \to_\beta \Omega ...$$

(iii)

$$\mathbf{Y} \to_\beta \lambda f.f\mathbf{Y} \to_\beta \lambda f.f(fY)...$$

Redukční strategie

Nasledující dvě definice se váží na redukci $\twoheadrightarrow_\beta$.

Definice (neformální)

Redukční strategie je funkce $f : \Lambda \to \Lambda$, pro každý term určí, který redex se má redukovat.

Definice (neformální)

Nejlevější (left-most) strategie je taková strategie, která u každého termu M vybíra nejlevější redex (tzn. takový redex, jehož příslušný λ-symbol je nejlevější z λ-symbolů všech redexů v M).

Normalizace

Definice

Redukce R je *(slabě) normalizující*, pokud existuje strategie redukující každý term na jeho R-normální formu.

Pozorování

$\twoheadrightarrow_\beta$ není normalizující. (Ω nemá β-normální formu.)

Věta o normalizaci

Pokud má M β-normální formu, vede k ní iterovaná kontrakce nejlevějšího redexu.

Příklady

(i) $\mathbf{K}\mathbf{I}\Omega \to_\beta \mathbf{K}\mathbf{I}\Omega \to_\beta \mathbf{K}\mathbf{I}\Omega \ldots$, pokud se v každém kroku redukuje Ω, a zároveň $\mathbf{K}\mathbf{I}\Omega \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{I}$, pokud se redukuje zleva.

(ii) Pro libovolný M platí $\mathbf{Y}M =_\beta M(\mathbf{Y}M)$, ale není pravda, že $\mathbf{Y}M \twoheadrightarrow_\beta M(\mathbf{Y}M)$ nebo $M(\mathbf{Y}M) \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{Y}M$.
Existuje tzv. Turingův kombinátor pevného bodu, pro který platí levý disjunkt: $\Theta \equiv AA$, kde $A \equiv (\lambda xy.y(xxy))$.

$$\begin{aligned}
\Theta M &\equiv ((\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy)))M \\
&\equiv AAM \\
&\to_\beta (\lambda y.y(AAy))M \\
&\to_\beta M(AAM) \\
&\equiv M(\Theta M)
\end{aligned}$$

Appendix - postup kódování

1. zakódování aritmetiky: `NUM`, `SUCC`, `PLUS`, `TIMES`, `POWER`, `PRED`, `SUB`
2. zakódování logiky: `TRUE`, `FALSE`, `IFTHENELSE`, `ISZERO`
3. zakódování λ-termů: podle konstrukce termu, každý term je reprezentován dvojicí přirozených čísel, levý prvek je číslo posledního kroku kostrukce a pravý je kód příslušného podtermu; e.g. číslo aplikace se získá následovně

$$\#(MN) = [2, [\#M, \#N]],$$

příčemž dvojici přirozených čísel lze rekurzivně kódovat jedním číslem, tedy taky λ-termem reprezentujícím příslušný numerál

Appendix - postup důkazu nerozhodnutelnosti rovnosti

Věta (Kleene)

Existuje 'interpret' λ-termů E, že pro každý term M platí

$$E\ulcorner M \urcorner = M$$

Druhá věta o pevném bodě

$$\forall F \exists X (F\ulcorner X \urcorner = X)$$

Věta (Scott)

Každá netriviální množina λ-termů A ($A \neq \Lambda, A \neq \emptyset$) uzavřená na rovnost ($X \in A, X = Y \Rightarrow Y \in A$) je nerekurzivní ($\#A = \{\#M | M \in A\} \notin \Delta_1$).

Protože je λ-kalkul kostistentní, rovnost termů je nerozhodnutelná.