

Graphs

Svarny Petr

Katedra logiky FF UK

22. března 2021

Overview

Grafy

Pojmy

Vlastnosti

Reprezentace grafů

Stromy

Graph, graf

- ▶ Složen z uzlů a (ne)orientovaných hran.
- ▶ Realizován vícero způsoby hlavní je myšlenka sousedství (adjacency).

Graf přesněji

Orientovaný graf

o n uzlech je dvojice $G = (V(G), E(G))$, kde

- ▶ $V(G)$ je množina uzlů, $n = |V(G)|$
- ▶ $E(G) = \{\langle u, v \rangle; u, v \in V(G)\} \subset V(G) \times V(G)$
- ▶ Orientovaná hrana, uspořádaná dvojice, $\langle u, u \rangle$ se nazývá smyčka.

Graf přesněji

Orientovaný graf

o n uzlech je dvojice $G = (V(G), E(G))$, kde

- ▶ $V(G)$ je množina uzlů, $n = |V(G)|$
- ▶ $E(G) = \{\langle u, v \rangle; u, v \in V(G)\} \subset V(G) \times V(G)$
- ▶ Orientovaná hrana, uspořádaná dvojice, $\langle u, u \rangle$ se nazývá smyčka.

Neorientovaný graf

o n uzlech je dvojice $G = (V(G), E(G))$, kde

- ▶ $V(G)$ je množina uzlů, $n = |V(G)|$
- ▶ $E(G) = \{\{u, v\}; u, v \in V(G)\}$

=Stránky s definicemi a problémy s grafy=

Podgraf grafu G

Graf H je podgrafem grafu G pokud

- ▶ $V(H) \subseteq V(G)$,
- ▶ $E(H) \subseteq E(G)$.

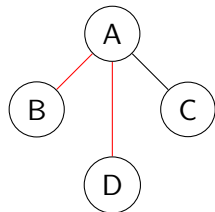
Také existuje tzv. indukovaný podgraf, tj. jen odstranění uzlu a hran s ním spojených.

Pojmy

Cesta v grafu G

je posloupnost vrcholů (v_0, \dots, v_n) tž.

- ▶ $\forall i \in (0, \dots, n) : v_i \in V(G)$,
- ▶ v_i jsou navzájem různé,
- ▶ $\forall i \in (0, \dots, n - 1) : \{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$.



=Wiki definice=

Cyklusv grafu G

je posloupnost vrcholů $(v_0, \dots, v_n = v_0)$ tž.

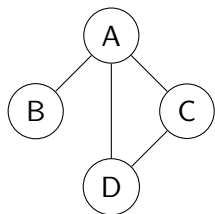
- ▶ $\forall i \in (0, \dots, n - 1) : v_i \in V(G)$ jsou navzájem různé,
- ▶ $\forall i \in (0, \dots, n - 1) : \{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$.

Jak vypadá nejmenší možný cyklus?

Pojmy

Stupeň vrcholu

Výraz $\deg_G(v)$ označuje počet hran grafu G obsahujících vrchol v .



Pojmy

Skóre grafu

Pro vrcholy v_1, v_2, \dots, v_n grafu G je posloupnost $(deg_G(v_1), deg_G(v_2), \dots, deg_G(v_n))$ je posloupnost stupňů grafu, alias skóre grafu G .

Skóre

Dvě skóre jsou stejná pokud jsou jejich permutace stejné.

Skóre a izomorfismus

Pokud mají dva grafy stejné skóre, jsou isomorfní.

Ohodnocení hran grafu

Funkce w , tž.:

$$w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$$

je ohodnocením grafu.

Ohodnocení hran grafu

Funkce w , tž.:

$$w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$$

je ohodnocením grafu.

Jak budu často volit funkci ohodnocení hran grafu? Proč?

Vlastnosti

Acyklický graf

Řekneme, že graf G je acyklický, jestliže neobsahuje žádný cyklus.

Vlastnosti

Isomorfní graf

Dva grafy $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ jsou isomorfní, jestliže existuje bijektivní zobrazení $f : V \rightarrow V'$ tž.:

- ▶ $\{x, y\} \in E$ ptk. $\{f(x), f(y)\} \in E'$

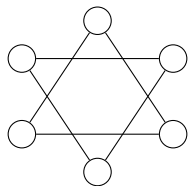
Skóre a izomorfismus

Pokud mají dva grafy stejné skóre, jsou isomorfní.

Vlastnosti

Souvislý graf

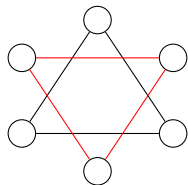
Řekneme, že graf G je souvislý, jestliže pro každé jeho dva vrcholy u a v existuje v G cesta z u do v .



Vlastnosti

Souvislý graf

Řekneme, že graf G je souvislý, jestliže pro každé jeho dva vrcholy u a v existuje v G cesta z u do v .



Komponenta (souvislosti)

Souvislý maximální indukovaný podgrafu grafu G .

Vlastnosti

Úplný graf

Řekneme, že graf G je úplný, jestliže každé jeho dva různé vrcholy u a v jsou spojeny hranou.

Důsledek

$$|E| = \binom{|V|}{2}$$

Reprezentace

Jak vás napadá, že mohu jednoznačně reprezentovat graf?

Reprezentace

Seznamy

Viz definice grafu s $V(G)$, $E(G)$.

Resp. pro souvislé grafy postačuje $E(G)$.

Reprezentace

Matice sousednosti

Čtvercová matice definovaná předpisem:

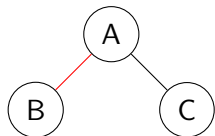
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E(G), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Reprezentace

Matice sousednosti

Čtvercová matice definovaná předpisem:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E(G), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$



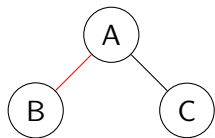
	A	B	C
A	0	1	1
B	1	0	0
C	1	0	0

Reprezentace

Matice sousednosti

Čtvercová matice definovaná předpisem:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E(G), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$



	A	B	C
A	0	1	1
B	1	0	0
C	1	0	0

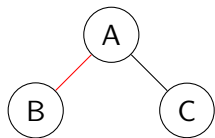
Jakou vlastnost bude mít matice úplného grafu?

Reprezentace

Matice sousednosti

Čtvercová matice definovaná předpisem:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E(G), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$



	A	B	C
A	0	1	1
B	1	0	0
C	1	0	0

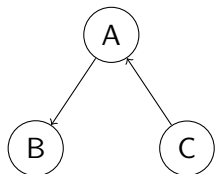
Jak bude vypadat matice sousednosti u orientovaného grafu?

Reprezentace

Matice sousednosti (orientovaná)

Čtvercová matice definovaná předpisem:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } \langle v_i, v_j \rangle \in E(G), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$



	A	B	C
A	0	1	0
B	0	0	0
C	1	0	0

Stromy

Strom

Souvislý acyklický graf nazveme strom.

Důsledek

$$|V(G)| = |E(G)| + 1$$