2. Stochastický integrál voči procesu s konečnou variáciou.

$\int X_t \, dZ_t$ $\qquad Z = (Z_t, t \in [0,T])$ stoch. proces s konečnou <u>úplnou</u> variáciou

X vhodný, vhodne adaptovaný proces.

$f : [0,T] \to \mathbb{R}$ $\qquad f^V$

$\Delta \in \{0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_n \le t, \; n \in \mathbb{N}\}$

$f^V(t) = \sup_{\Delta} \sum_{t_i \in \Delta} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \ge 0$ $\qquad t \mapsto f^V(t)$ je rastúca

Pokud $f^V(T) < \infty$ tak funkce f má konečnou úplnou variaci na $[0,T]$

O procesu $Z = (Z_t, t \in [0,T])$ řekneme, že má konečnou úplnou variaci, pokud jeho trajektorie $Z(\omega)$ splňuje $Z^V_T(\omega) < \infty$ pro s.v. ω.

S pravděp. 1: $\sup \sum |Z_{t_{i+1}}(\omega) - Z_{t_i}(\omega)| < \infty$

Uvažujeme integrandy typu

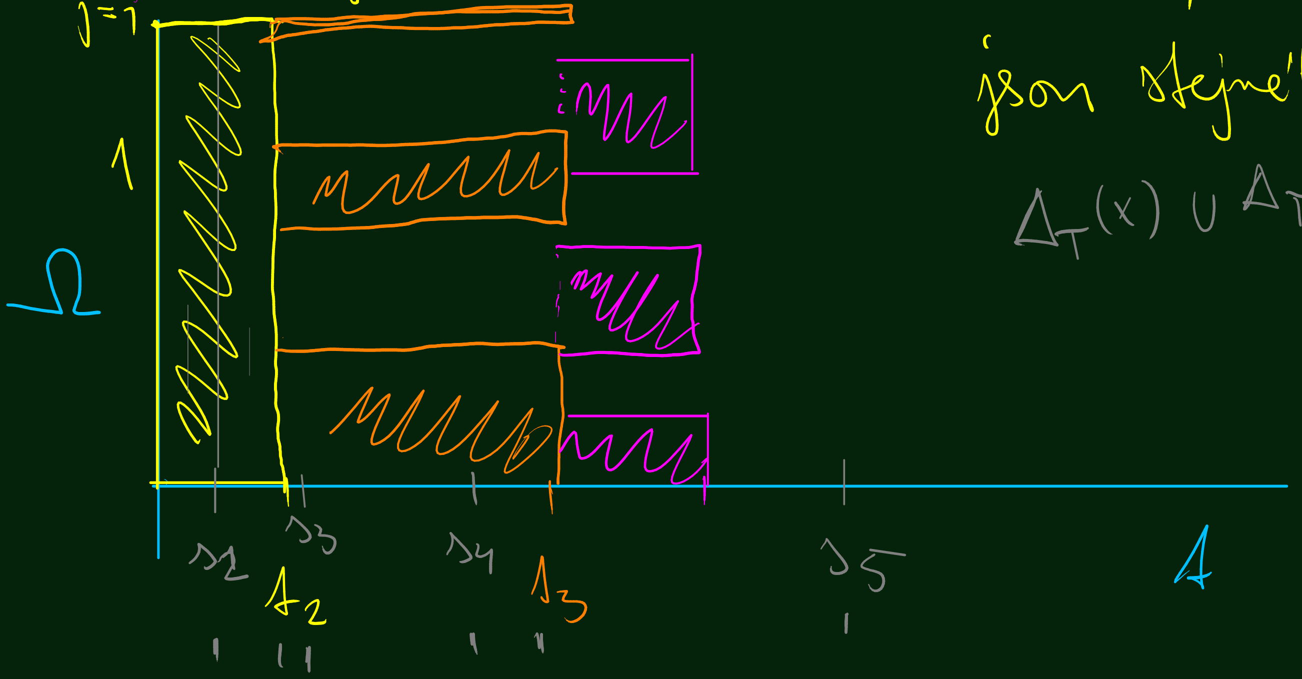
$$X_t = \xi_0 1_{\{0\}} + \sum_{i=1}^{N} \xi_i 1_{(t_i, t_{i+1}]} \quad \text{kde } 0 = t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1} = T$$

(dělení Δ_T)

ξ_i je $\mathcal{F}_{t_i}$-měřitelná n. veličina. ξ_i nabývá jen konečně mnoha hodnot.

X .. pohled

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{k_i} 1_{A_j} \qquad A_j \in \mathcal{F}_{s_i}$$



X, Y elementární

$X+Y$, $X-Y$, $X \cdot Y$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$

jsou stejného typu

$\Delta_T(X) \cup \Delta_T(Y)$

Definice 1: Proces typu $X_t = \xi_0 1_{\{0\}} + \sum_{i=1}^{N} \xi_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}$

kde $0 = t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1} = T$

a ξ_i je $\mathcal{F}_{t_i}$-měřitelné s nejvýše konečně mnoha hodnotami

nazveme $\mathcal{F}_t$- elementární integrand

$\mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$ množina všech elementárních integrandů vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_t$.

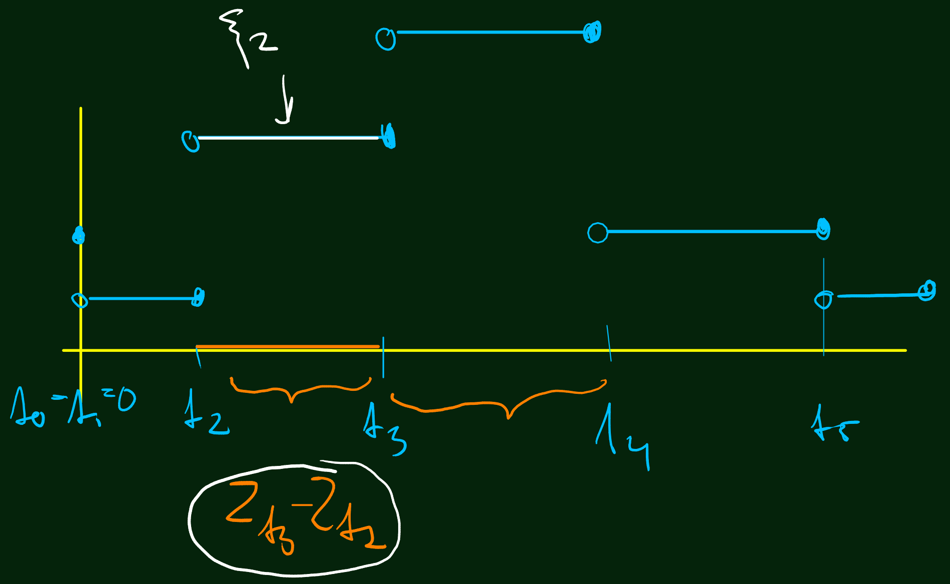
$$X, Y \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_t) \Rightarrow X+Y,\ X \wedge Y,\ X \vee Y,\ X-Y,\ X \cdot Y \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$$

$$X_t = 1_{A_0} 1_{\{0\}} + \sum_{i=1}^{N} 1_{A_i} 1_{(t_i, t_{i+1}]}$$

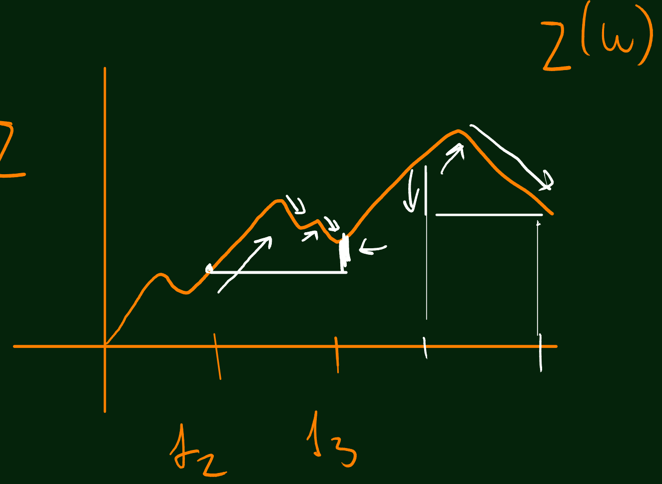
$$A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$$

zleva spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces

$\mathcal{F}_t$ - predikabilní proces



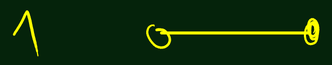
$\int X \, dZ$



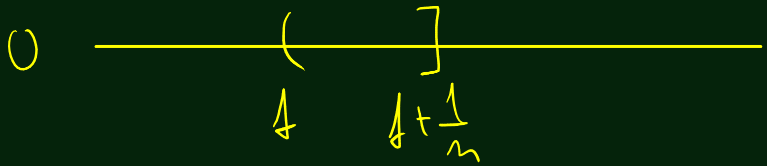
$$\int X \, dZ = \xi_0 \cdot \Delta Z_0 + \sum_{i=1}^{N} \xi_i \left(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i} \right)$$

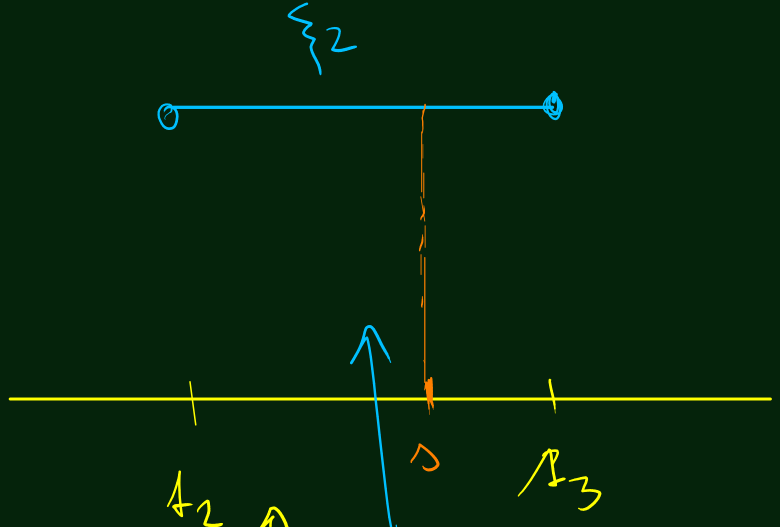
Tato definice nezávisí na $\Delta_T(X)$

$$\int (X+Y) \, dZ = \int X \, dZ + \int Y \, dZ$$



$$X^n = 1(t, t+\tfrac{1}{n}]$$





$$\xi_2 \left(Z_{t_3} - Z_{t_2} \right)$$

$$\xi_2 \left(Z_s - Z_{t_2} \right) + \xi_2 \left(Z_{t_3} - Z_s \right) = \xi_2 \left(Z_{t_3} - Z_{t_2} \right)$$

$$\int X^n \, dZ = Z_{1+\frac{1}{n}} - Z_1$$

$$X^n = 1_{(1,\,1+\frac{1}{n}]}$$

očekáváme $\int X^n \, dZ \to 0$

$X^n \to 0$

$\left(|X^n| \le 1\right)$

~~$\left(\text{ne } X^n \to 1_{\{1\}}\right)$~~

Potřebujeme, aby $Z_{1+\frac{1}{n}} - Z_1 \to 0$

Přirozeným požadavkem na proces Z je jeho spojitost zprava.

Další přirozený požadavek je $\mathcal{F}_t$-adaptovanost Z.

Spojitost zprava + $\mathcal{F}_t$-adaptovanost zaručují $\mathcal{F}_t$ - progresivní měřitelnost

tj. $(\omega, s) : \Omega \times [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}$ je $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}[0,t]$ měřitelné

$$\{(\omega, s) \; ; \; \omega \in \Omega, s \in [0,t] \, , \, Z_s(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}[0,t] \quad \forall a \in \mathbb{R}$$
$$\forall t \in [0,T]$$

<u>Definice 2:</u> (Lp - integrátor)

Proces $Z = (Z_t, t \in [0,T])$ který je zprava spojitý a $\mathcal{F}_t$-adaptovaný nazveme pro $p \geq 1$ Lp - integrátorem, pokud

$$\exists K < \infty \qquad \sup \left\{ \left(E \left| \int X \, dZ \right|^p \right)^{1/p}, \; X \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_t), \, |X| \leq 1 \right\} \leq K$$

$|X| \le 1$ pokud $|X_t(\omega)| \le 1 \quad \forall \omega, \forall t \in [0,T]$

$$\sup\left\{\left(E\left|\int X\,dZ\right|^p\right)^{1/2}\right.$$

Definujme $\quad \underbrace{|Z|}_{\;}{}_{I_p} = \sup\left\{\left(E\left|\underbrace{\int X\,dZ}_{\;}\right|^p\right)^{1/p}, X \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_t), |X| \le 1\right\}$

$p \ge 1$ náhodná veličina

$$|Z|_V(\omega) = |Z_0(\omega)| + \sup_{\Delta_T}\left\{\sum_{t_i \in \Delta_T} |Z_{t_{i+1}}(\omega) - Z_{t_i}(\omega)|\right\}$$

úplná variace trajektorie $Z(\omega)$ $\quad |Z_V|$ úplná variace Z