ApDR - 3. PŘEDNÁŠKA

I.4 Další modely dravec-kořist

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= r(x)x - d(x)\cdot y \\ y' &= -h(y)y + \varkappa d(x)\cdot y \end{aligned}}$$

x… kořist

y… predátor

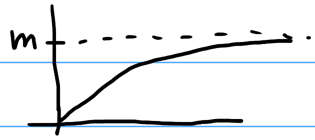
zaměříme se na funkci d … trofická funkce

nebo též funkční odezva predátora

L-V : $d(x) = k\cdot x$

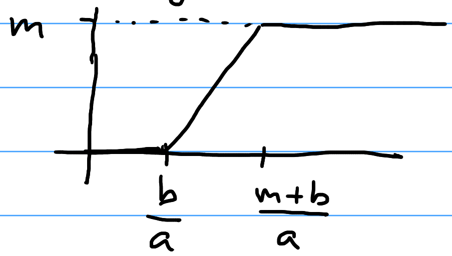
… nerealistické pro velké hodnoty x

H-T : $d(x) = \dfrac{mx}{A+x}$

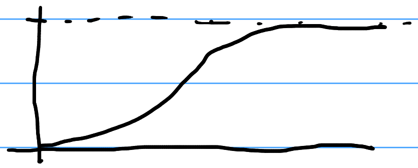


predátor sežere max. m kusů kořisti, pak se nasytí.

Další modely:



$$d(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{b}{a} \\ ax-b & x \in \left[\frac{b}{a}, \frac{m+b}{a}\right] \\ m & x > \frac{m+b}{a} \end{cases}$$



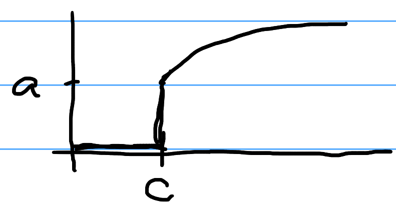
modely „se skrýší"

pokud je kořisti málo, schová se ve skrýši, predátor ji nenajde

… nulový odlov / malý odlov.

Gauseho model 1936

se skrýší



pozorováno:

predátor … trepka velká, kořist … kvasinky

matematicky … nespojitost $\quad x' = f(x,t)$, ~~f je spojitá~~

⇝ teorie diferenciálních inkluzí

$x' \in f(x,t)$ f je množinová funkce ... dvojici (x,t) přiřadí množinu čísel $f(x,t)$ ... většinou jednobodová, ale pro $x=c$ je $f(c,t)=[0,a]$.

• Alleeho efekt .... velryby, pirani, ...

populace musí mít nějakou minimální velikost, aby byla schopná přežít. Pokud je menší, dochází k vymírání.

$$x' = \left(1-\frac{x}{K}\right)\left(\frac{x}{\theta}-1\right) - d(x)y$$

$x<\theta$ $\left(\frac{x}{\theta}-1\right)<0$ ... dochází k vymírání populace

I.5 Modely konkurence

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= r\left(1-\frac{x+ay}{K}\right)x \\ y' &= s\left(1-\frac{y+bx}{L}\right)y \end{aligned}}$$

x, y dvě konkurenční populace

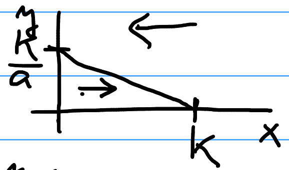
$r,s>0$ ... reprodukční koeficienty

$K,L>0$ ... kapacity prostředí

$a,b>0$ ... koeficienty vyjadřující, nakolik si x a y konkurují.

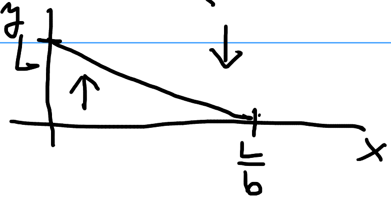
kvalitativní analýza:

$x'>0 \iff x+ay<K$



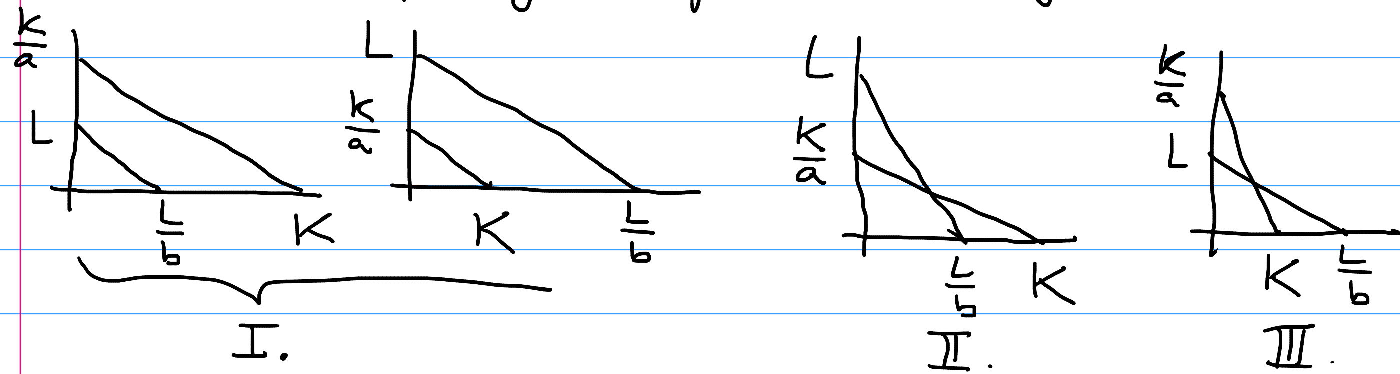
$y = \frac{K-x}{a}$

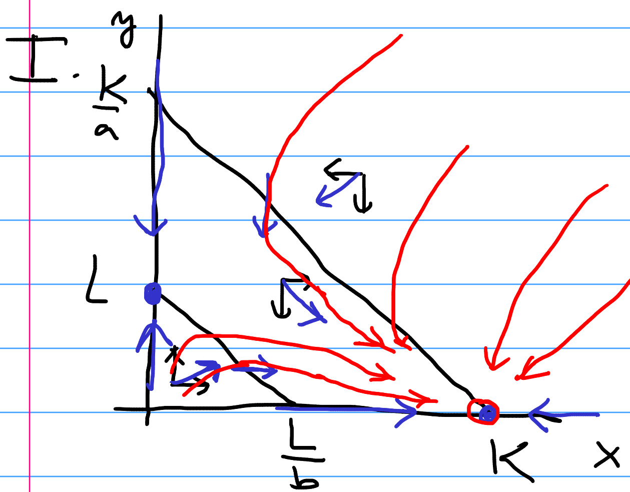
$y'>0 \iff y+bx<L$



$y = L-bx$

Tři možné případy vzájemné polohy úseček:





$[K, 0]$ je asymptoticky stabilní, globální atraktor 1. kvadrantu

$[0, L]$ nestabilní stacionární bod

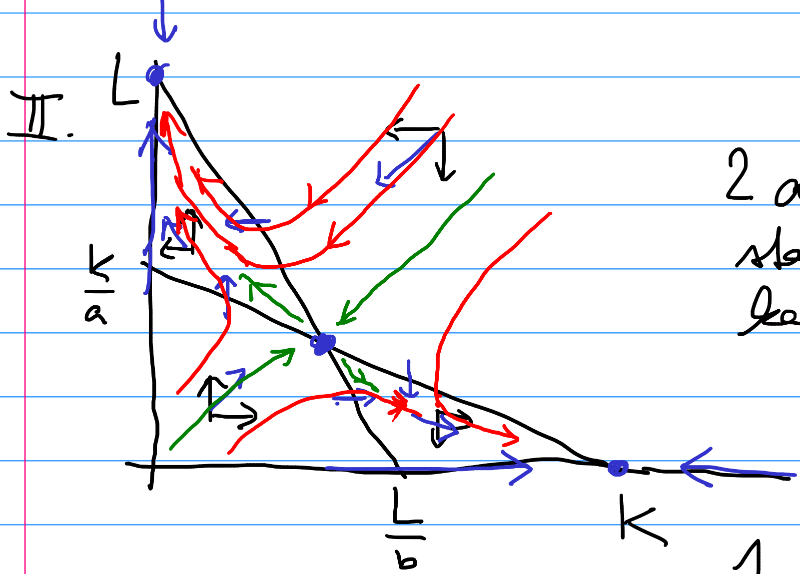
x vytlačí y

„invazní druh vytlačí ten původní"

tj. $K > \frac{L}{b}$, $L < \frac{K}{a}$ $\rightsquigarrow$ $K > aL$

a je malé

b je velké



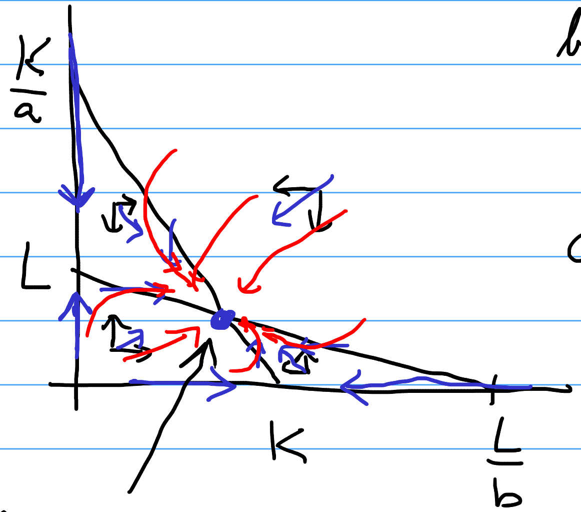
2 asymptoticky stabilní stacionární body, každý přitahuje nějakou část 1. kvadrantu

1 nestabilní (typ sedlo)

pro $K > \frac{L}{b}$ a $L > \frac{K}{a}$ .... a,b jsou velká

Druh, který měl na začátku navrch, úplně vytlačí svého konkurenta.

III.



bod B

bod B je globální atraktor 1. kvadrantu

ani jedna z populací nevyhyne, konvergují k nějakém rovnovážnému stavu

pro $\frac{L}{b} > K$, $\frac{K}{a} > L$ ... a,b jsou malá

I.6 Model symbiózy

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x(K-x) + \frac{xy}{y+1} \\ y' &= -\frac{y}{2} + \frac{xy}{y+1} \end{aligned}}$$

symbióza

x... populace květiny
y... populace opylovače

$y=0$ ... opylovač chybí, ale existují jiní opylovači => rostlina je schopná prosperovat i bez něj. Nicméně s opylovačem

$$x' = x\left(K + \frac{y}{y+1} - x\right)$$

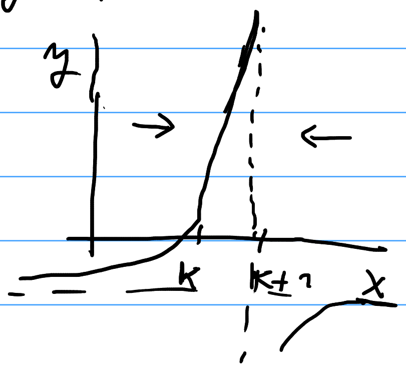
se kapacita prostředí zvětší z K na $K + \frac{y}{y+1}$

$x=0$ ... rostlina chybí, opylovač vymírá (je to jediná rostlina, kterou se živí) za přítomnosti rostliny dostáváme

$$y' = y\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{y+1}\right) \dots \text{opylovač prosperuje}$$

Kvalitativní analýza

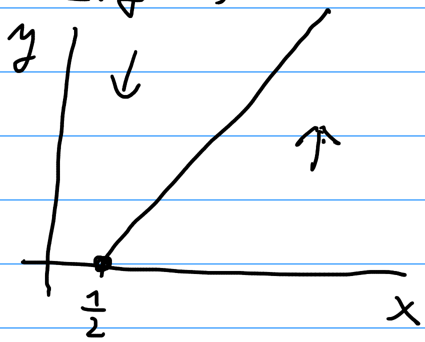
$x' > 0 \iff x < k + \frac{y}{y+1}$



$y > -1 - \frac{1}{x-k-1}$

$x < k+1$

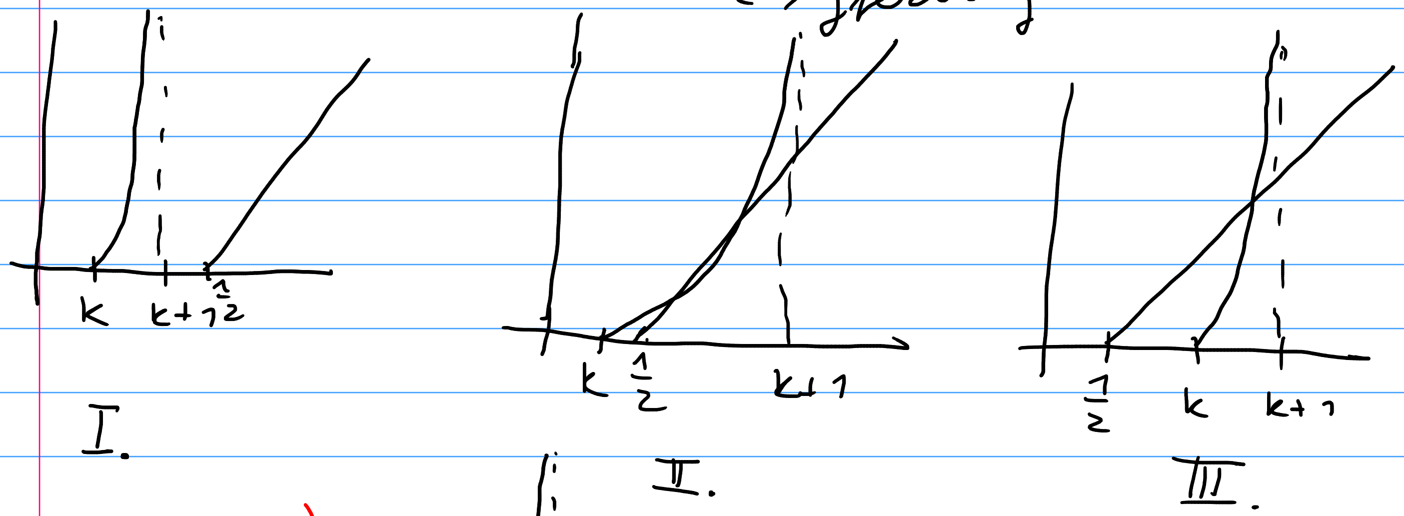
$y' > 0 \iff x > \frac{1}{2}(y+1)$

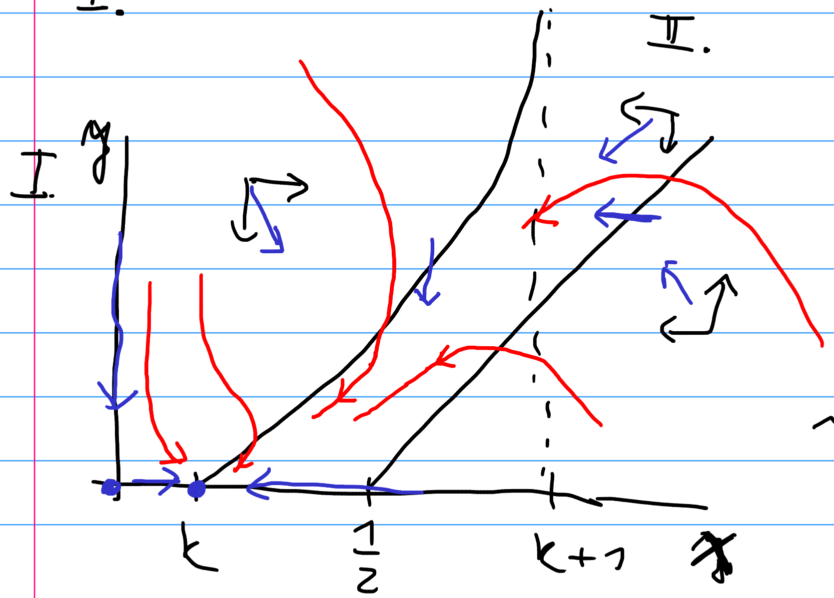


$2x > y+1$

$y < 2x-1$

Několik možností vzájemné polohy polopřímky a hyperboly





$[k,0]$ je globální atraktor

⇝ opylovač vyhyne, rostlina se ustálí na hodnotě K pro K malé.