6.3 Substituce převádějící na racionální funkce

(1) Nechť $a \in \mathbb{R}$. Při integraci funkcí typu

$$\int R(e^{ax})\,dx \quad \text{používáme substituci} \quad t = e^{ax}.$$

(2) Při integraci funkcí typu $\int R(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$

používáme substituci $t = \log x$.

Příklady: 1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot(\log^2 x - 5\log x + 6)}\,dx = \quad t = \log x \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

$$= \int \frac{1}{t^2 - 5t + 6}\,dt = \int \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right) dt = \log|t-3| - \log|t-2|$$

$$= \log|\log x - 3| - \log|\log x - 2| \quad \text{na } (0, e^2),\ (e^2, e^3) \text{ a } (e^3, \infty).$$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{\frac{x}{6}}\left(1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}\right)}\, e^{\frac{x}{6}}\,dx \qquad t = e^{\frac{x}{6}} \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{6}\cdot e^{\frac{x}{6}} \Rightarrow 6\cdot dt = e^{\frac{x}{6}}\cdot dx$

$$= \int \frac{1}{t\cdot(1 + t^3 + t^2 + t)}\,6\,dt = 6\cdot\int \frac{dt}{t\cdot(t+1)\cdot(t^2+1)} = 6\cdot\left(\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{t+1} + \frac{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}{t^2+1}\right) dt\right)$$

$$\left(= \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{ct+d}{t^2+1} \right)$$

$$= \underbrace{6\cdot\ln\left|e^{\frac{x}{6}}\right|}_{x} - 3\log\left(1 + e^{\frac{x}{6}}\right) - \frac{3}{2}\log\left(1 + e^{\frac{x}{3}}\right) + 3\cdot\arctan e^{\frac{x}{6}}$$

na $\mathbb{R}$

6.4. Integrace trigonometrických funkcí

Def Racionální funkcí dvou proměnných rozumíme podíl dvou polynomů $R(a,b) = \frac{P(a,b)}{Q(a,b)}$, kde $P(a,b)$ a $Q(a,b)$ jsou polynomy dvou proměnných a Q není ~~ne~~ identicky nulový.

(3) Při integraci funkcí $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ používáme substituce

(i) pokud $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak používáme $t = \cos x$

(ii) pokud $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak používáme $t = \sin x$

(iii) pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak používáme $t = \tan x$

(iv) vždy funguje $t = \cancel{\mathrm{tg}}\, \tan \frac{x}{2}$.

Dobrá rada: Pokud je možné použít (i) nebo (ii), je výpočet většinou nejsnazší. Substituci (iv) je dobré používat jen, když nelze použít (i), (ii) ani (iii).

Poznámka: Po substituci $t = \cancel{\mathrm{tg}}\, \tan x$ a $t = \cancel{\mathrm{tg}}\, \tan \frac{x}{2}$ je většinou nutné primitivní funkci po formálním spočtení ještě „lepit".

Příklady: 1) $\int \frac{1}{\cos x \cdot \sin^2 x}\,dx$ $\qquad R(a,b) = \frac{1}{a\cdot b^2}$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{\cos x \cdot (-\sin x)^2} = \frac{1}{\cos x \cdot \sin^2 x} \neq -\frac{1}{\cos x \sin^2 x} \quad \text{nelze (i)}$$

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{-\cos x \cdot \sin^2 x} = -\frac{1}{\cos x \cdot \sin^2 x} \qquad \underline{\underline{t = \sin x}}$$

$$= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x \; \sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{(1-t^2)\cdot t^2}\,dt \qquad dt = \cos x\,dx \;\Leftarrow\; \frac{dt}{dx} = \cos x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$$

$$= \int \frac{1}{t^2} + \frac{\frac{1}{2}}{t+1} - \frac{\frac{1}{2}}{t-1} \overset{c}{=} -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln|t-1| =$$

$$\overset{c}{=} -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln|\sin x + 1| - \frac{1}{2}\ln|\sin x - 1|$$

$$\text{na } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) + k\cdot\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

2) $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{1+(-\sin x)^2} \neq -\frac{1}{1+\sin^2 x} \quad \text{nelze (i)}$$

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{1+\sin^2 x} \neq -\frac{1}{1+\sin^2 x} \quad \text{nelze (ii)}$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{1+(-\sin x)^2} = \frac{1}{1+\sin^2 x} \quad \text{lze} \quad \underline{\underline{t = \tan x}}$$

9-4

$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx =$ $\quad t = \tan x \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi \quad \tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na $\mathbb{R}$ prostě

$\cancel{tg\,x}$ $\tan x = t \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = t^2 \Rightarrow \sin^2 x = t^2 \cdot (1-\sin^2 x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2 x \cdot (1+t^2) = t^2 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ $\quad \left(\Rightarrow \cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}\right)$

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+t^2 \Rightarrow \frac{dt}{1+t^2} = dx$

$= \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+t^2+t^2} = \int \frac{dt}{1+(\sqrt{2}\cdot t)^2} =$

$\overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan(\sqrt{2}\,t) \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan(\sqrt{2} \cdot \tan x)$

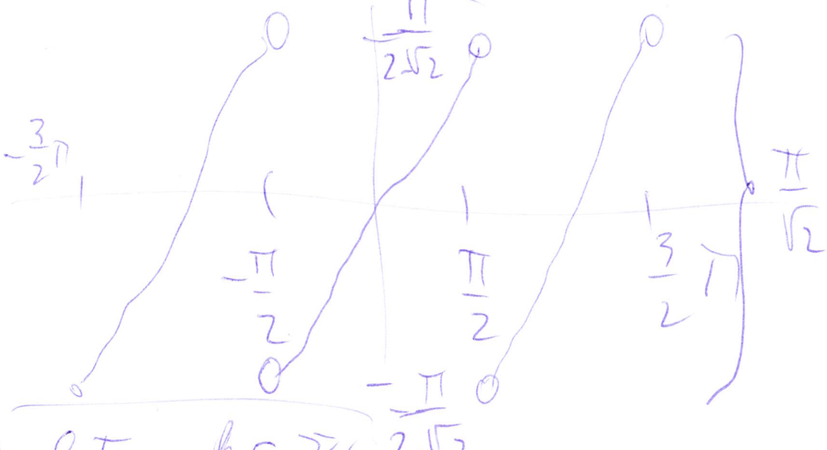
na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$

$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx = F(2\pi) - F(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan(\sqrt{2} \cdot \tan(2\pi)) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan(\sqrt{2} \cdot \tan 0)$

$+2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ $\quad 0 \quad 0$

$\frac{1}{1+\sin^2 x}$ je spojitá $\Rightarrow \exists$ primitivní na $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} F(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2}$



$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan(\sqrt{2} \cdot \tan x) & \text{na } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan(\sqrt{2} \cdot \tan x) + \frac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{na } (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan(\sqrt{2} \cdot \tan x) + k \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{na } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} + k \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

6.5. Integrace funkcí obsahujících odmocniny

(4) Nechť $q \in \mathbb{N}$ a $ad \neq bc$. Při integraci funkcí typu

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \quad \text{používáme substituci } t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(5) (Eulerovy substituce) Nechť $a \neq 0$. Při integraci funkcí typu

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$ používáme následující substituce

a) polynom ax^2+bx+c má dvojnásobný kořen α a $a>0$, pak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot |x-\alpha|$ a je to „v podstatě" racionální funkce.

b) polynom ax^2+bx+c má dva reálné kořeny α_1 a α_2. Pak úpravou převedeme na tvar (4) pro $\sqrt{a \cdot \frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}}$ nebo $\sqrt{a \cdot \frac{\alpha_1 - x}{x-\alpha_2}}$.

c) polynom ax^2+bx+c nemá reálný kořen a $a>0$.
Pak používáme substituci $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot x + t$.

Poznámka: Substituce (3)(iii), (iv) a (5) c) jsou substituce 2. druhu a je vždy potřeba ověřit, že vnitřní funkce je monotonní a na.

Příklady: 1. Spočtěte $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$ na $(1,\infty)$

$$= \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}\,dx$$

$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow t^2 = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow t^2(x-1) = x+1$

$\Rightarrow x\cdot(t^2-1) = 1+t^2 \Rightarrow x = \frac{1+t^2}{t^2-1} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2t\cdot(t^2-1)-(1+t^2)\cdot 2t}{(t^2-1)^2} = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}$

$$= \int \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,dt = \ldots\ldots$$

$$\int \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$\sqrt{x^2+1} = x+t$

$\sqrt{x^2+1}-x = t$

$\cancel{x^2}+1 = \cancel{x^2}+2xt+t^2 \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{2t}$

PŘEDPOKLADY

$\Rightarrow dx = \frac{-2-2t^2}{4t^2}\,dt$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2\cdot\left(\frac{1-t^2}{2t}+t\right)}\cdot\frac{-2-2t^2}{4t^2}\,dt = \int \frac{-4t}{(1-t)^2\cdot(1+t)^2}\,dt =$$

$x = \frac{1-t^2}{2t} = \frac{1}{2t}-\frac{t}{2}$

$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2} < 0$

$\Rightarrow x(t)$ je prostá ~~na $(-\infty,0)$ i $(0,\infty)$~~

$(0,1) \xrightarrow{na} (0,\infty)$

$(1,\infty) \xrightarrow{na} (0,-\infty)$

$$= \int \frac{-1}{(1-t)^2}\,dt + \int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt \overset{c}{=} -\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t} = \frac{2}{t^2-1}$$

$$\overset{c}{=} \frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2-1}$$ na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$