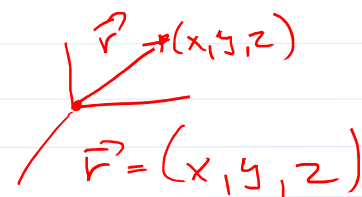


Určete gradient následujících skalárních polí ($\vec{r}$ je radiusvektor): a) $\cancel{r}$, b) $\underline{r^2}$, c) $\underline{r^3}$, d) $\underline{\frac{1}{r}}$, e) $\underline{\frac{1}{r^2}}$, f) $\underline{\frac{1}{r^3}}$, g) $\vec{c} \cdot \vec{r}$, h) $\underline{\frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r}}$, i) $\underline{\frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r^2}}$, j) $\underline{\frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r^3}}$.
 $\left[\frac{\vec{r}}{r}, 2\vec{r}, 3r\vec{r}, \frac{-\vec{r}}{r^3}, \frac{-2\vec{r}}{r^4}, \frac{-3\vec{r}}{r^5}, \vec{c}, \frac{r^2\vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^3}, \frac{r^2\vec{c} - 2(\vec{c} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^4}, \frac{r^2\vec{c} - 3(\vec{c} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right]$; zde i v následujících příkladech řešení s podmínkou $r \neq 0$, pokud výrazy při $r \rightarrow 0$ neomezeně rostou.]



$\vec{c}$ - konstantní vektor

$$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

$$\nabla r = \left(\frac{x}{r} \mid \frac{y}{r} \mid \frac{z}{r} \right) = \frac{1}{r} \vec{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad |\vec{r}| = r$$

$$\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

analogicky pro

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{m}{2}} \right] = 2x \cdot \frac{-m}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{m}{2}-1} = -m x r^{-m-2} = -\frac{m x}{r^{m+2}}$$

$$\nabla \frac{1}{r^m} = \nabla r^m = \begin{pmatrix} -\frac{mx}{r^{m+2}} & -\frac{my}{r^{m+2}} & -\frac{mz}{r^{m+2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m=1 & \vec{r} & Q \text{ v počítání} \\ \sim & -\frac{\vec{r}}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{m \vec{r}}{r^{m+2}}$$

$\vec{c}$ - constant vector

$$\nabla(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \nabla(c_x x + c_y y + c_z z) = \vec{c}$$

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \vec{c} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \vec{c} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\nabla(\vec{r} \cdot \vec{c}) = \nabla \vec{r} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \nabla \vec{r} = \vec{c}$$

$f = \vec{c} \cdot \vec{r}; g = r^{-3}$

$$\nabla \frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r^3} = \left(-3 \frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r^5} x + \frac{c_x}{r^3}, -3 \frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r^5} y + \frac{c_y}{r^3}, -3 \frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r^5} z + \frac{c_z}{r^3} \right)$$

$$= \frac{1}{r^3} (c_x, c_y, c_z) - 3 \frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r^5} (x, y, z) =$$

$$= \frac{\vec{c}}{r^3} - 3 \frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r}$$

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= f \nabla g + g \nabla f = \vec{c} \cdot \vec{r} \nabla r^{-3} + r^{-3} \nabla(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \\ &= -3 \frac{\vec{r}}{r^5} \vec{c} \cdot \vec{r} + \frac{1}{r^3} \vec{c} = \frac{\vec{c}}{r^3} - 3 \frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\text{var}} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (c_x x + c_y y + c_z z) \right) \\ &= (c_x x + c_y y + c_z z) \cdot \frac{-3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2x + \\ &+ (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot c_x = \vec{c} \cdot \vec{r} \cdot (-3) \cdot \frac{x}{r^5} + \frac{c_x}{r^3} \\ &= -3 \frac{x \vec{c} \cdot \vec{r}}{r^5} + \frac{c_x}{r^3} \end{aligned}$$

Určete divergenci a rotaci následujících vektorových polí:

a) $\vec{r}$, b) $\frac{\vec{r}}{r}$, c) $\frac{\vec{r}}{r^2}$, d) $\frac{\vec{r}}{r^3}$, e) $\frac{\vec{c}}{r}$.

DÚ

$[3, \vec{0}; \frac{2}{r}, \vec{0}; \frac{1}{r^2}, \vec{0}; 0, \vec{0}; -\frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r^3}, \frac{\vec{c} \times \vec{r}}{r^3}]$. Všimněme si zejména příkladu d), který odpovídá Coulombově poli bodového náboje, umístěného v počátku souřadnic. Toto pole má všude kromě počátku $\text{div } \vec{F} = 0$ v souladu s Poissonovou rovnicí. Naproti tomu lze dokázat i opačně, že jediné pole, které vyhoví této podmínce je právě pole Coulombovo. Rozložíme-li totiž obecné pole $\vec{F}$ do mocninné řady se zápornými exponenty (pole neomezeně roste při $r \neq 0$) a najdeme divergenci obecného členu této řady:

$$\text{div } \frac{\vec{r}}{r^\alpha} = \frac{\text{div } \vec{r}}{r^\alpha} + \vec{r} \cdot \text{grad } \frac{1}{r^\alpha} = \frac{3 - \alpha}{r^\alpha} = 0, \text{ zjistíme, že jediný nenulový člen této řady odpovídá } \alpha = 3, \text{ tedy právě Coulombově poli.}]$$

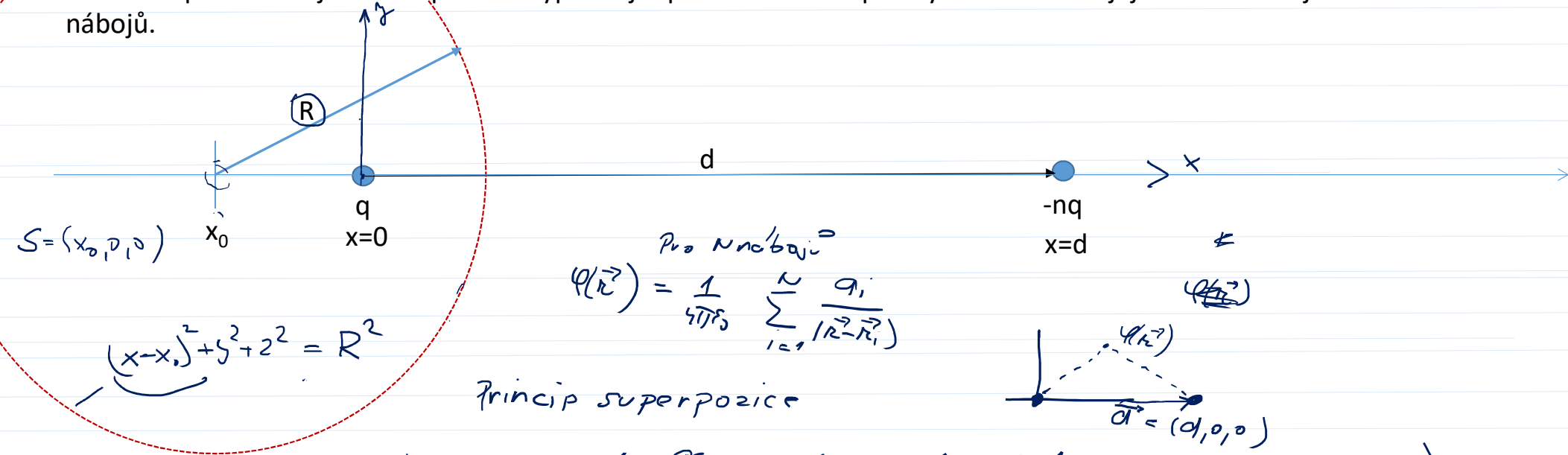
$$\text{div } \vec{F} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{div } \frac{\vec{r}}{r^n} &= \nabla \cdot (\vec{r}_c r^{-n}) = \nabla \cdot (\vec{r}_c r^{-n}) \\ &= \vec{r}_c \cdot \nabla r^{-n} + r^{-n} \nabla \cdot \vec{r} = \\ &= \vec{r} \cdot \left(-\frac{n \vec{r}}{r^{n+2}} \right) + r^{-n} 3 = \\ &= -n \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r^{n+2}} + \frac{3}{r^n} \end{aligned}$$

$$n = 3 \quad -3 \frac{r^2}{r^5} + \frac{3}{r^3} = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\vec{r}}{r^n} &= \nabla \times \left(\frac{\vec{r}_c}{r^n} \right) + \vec{r}_c \times \left(\frac{\nabla}{r^n} \right) = \\ &= -\vec{r} \times \nabla r^{-n} + r^{-n} \nabla \times \vec{r} = \\ &= -\vec{r} \times \left(-\frac{n \vec{r}}{r^{n+2}} \right) = 0 \end{aligned}$$

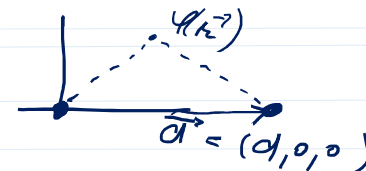
1.1.9. Poměr velikostí dvou bodových nábojů opačných znamének je n , vzdálenost obou nábojů je d . Dokažte, že povrch nulového potenciálu je kulová plocha. Vypočítejte poloměr R této plochy a vzdálenost jejího středu od jednoho z nábojů.



Pro N nábojů

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Princip superpozice



$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} - \frac{q^m}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{d} - \vec{r}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{n}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\varphi(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{n} \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}$$

$$n^2 x^2 + n^2 y^2 + n^2 z^2 = x^2 + 2xd + d^2 + y^2 + z^2$$

$$(n^2 - 1)(y^2 + z^2) + (n^2 - 1)x^2 - d^2 + 2xd = 0$$

$$x^2 + \frac{2xd}{n^2 - 1} - \frac{d^2}{n^2 - 1} + y^2 + z^2 = 0$$

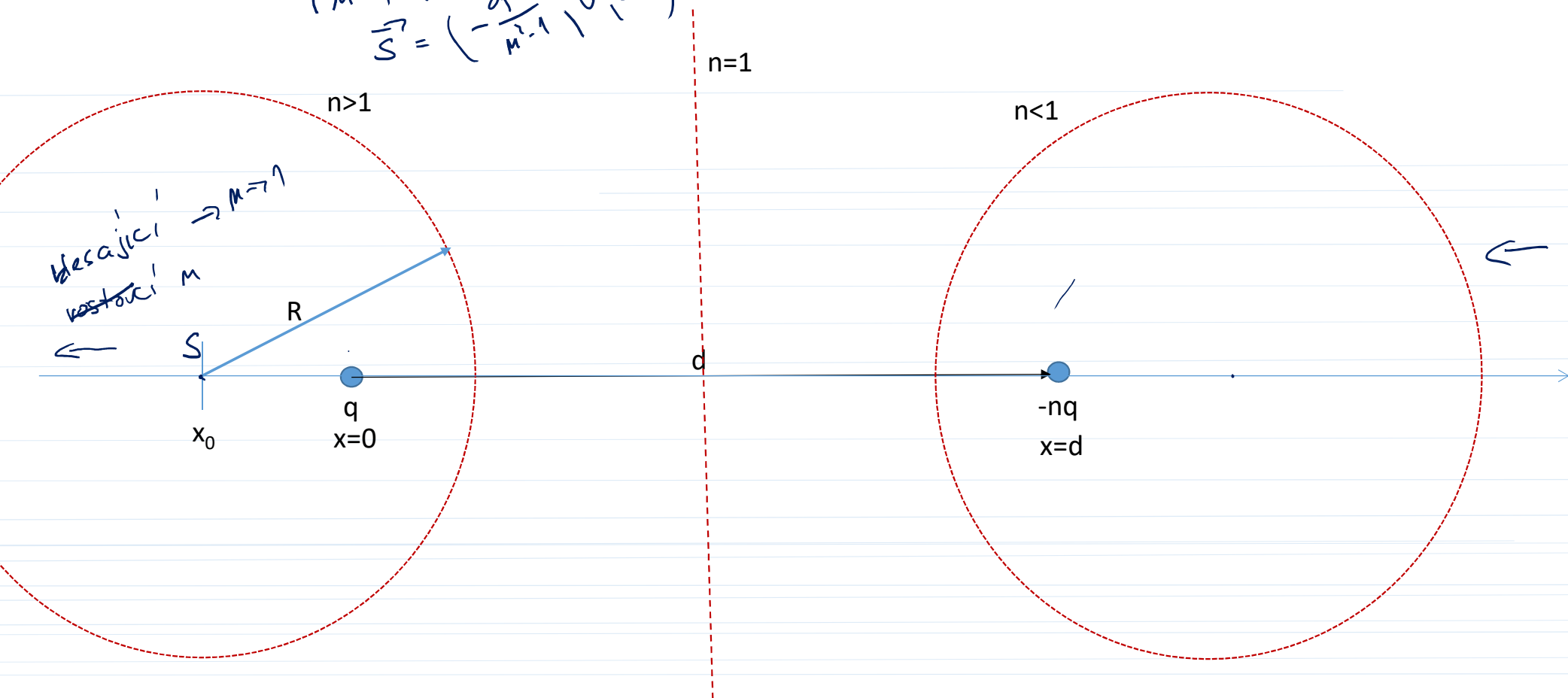
$$\left(x + \frac{d}{n^2 - 1} \right)^2 + y^2 + z^2 = d^2 \left(\frac{1 + n^2 \cdot 1}{(n^2 - 1)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{d n}{n^2 - 1} \right)^2$$

1.1.9. Poměr velikostí dvou bodových nábojů opačných znamének je n , vzdálenost obou nábojů je d . Dokažte, že povrch nulového potenciálu je kulová plocha. Vypočítejte poloměr R této plochy a vzdálenost jejího středu od jednoho z nábojů.

$$R = \left| \frac{dm}{m^2 - 1} \right|$$

$$\vec{S} = \left(-\frac{d}{m^2 - 1}, 0, 0 \right)$$



S1.1.19-1.1.20 Určete pomocí Gaussova zákona průběhy Intenzity a potenciálu a pole v okolí následujících homogenně nabitých objektů:

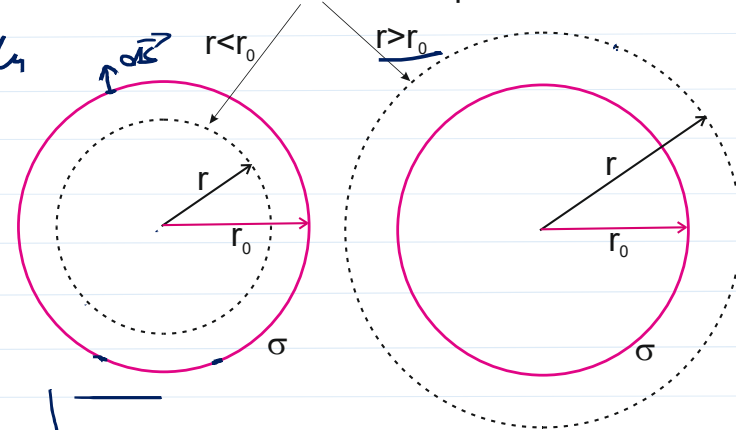
- kulová slupka
- koule
- válcová plocha a válec

Pole kulové slupky nabitá nábojem a pl. hustotou σ

→ Pole uvně i vně, pomocí G z.
 $E = E(r)$
 E - závisí na vzdálenosti od středu
 Symetrie

$$\phi_s = \frac{Q_c}{\epsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

kulová Gaussova plocha



$$r > r_0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_c}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r_0^2 \sigma}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi r_0^2 \sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q_c}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_c}{r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{r_0}{r}$$

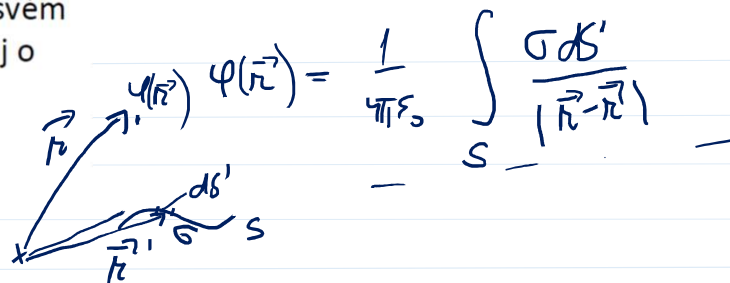
$$r < r_0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow E = 0 \text{ pro } r < r_0$$

S 1.1.17

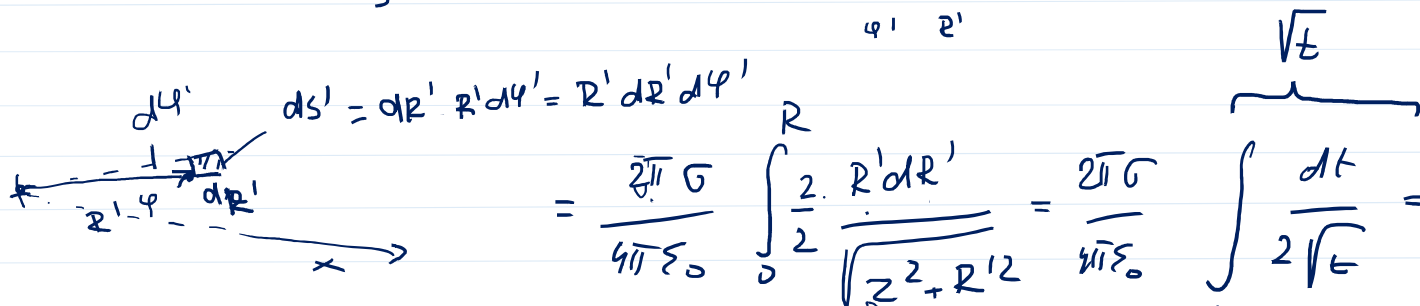
Kruhový ebonitový disk o poloměru R , který má na svém horním povrchu rovnoměrně rozložený kladný náboj o plošné hustotě σ .

Jaký je **potenciál elektrického pole** v bodě P ?

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$


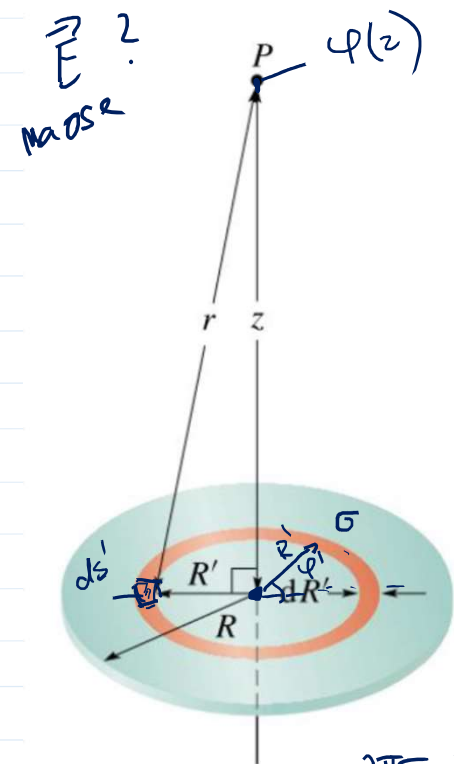
$$d\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS'}{\sqrt{z^2 + R'^2}}$$

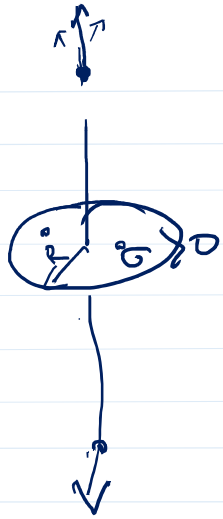
$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS'}{\sqrt{z^2 + R'^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma}{\sqrt{z^2 + R'^2}} R' dR' d\varphi' =$$

$$ds' = R' d\varphi' dR' = R' dR' d\varphi'$$


$$= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{dt}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R'^2} \right]_0^R = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right]$$





$$\vec{E} = (0, 0, E_z)$$

na ose

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - |z|)$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 1 \right) & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} + 1 \right) & z < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$\nearrow$
 $z > 0$

— nabita' nezávislá rovina

