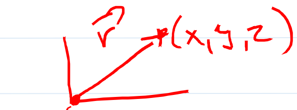
Určete gradient následujících skalárních polí ($\vec{r}$ je radiusvektor): a) r, b) r^2, c) r^3, d) $\frac{1}{r}$, e) $\frac{1}{r^2}$, f) $\frac{1}{r^3}$, g) $\vec{c}\cdot\vec{r}$, h) $\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r}$, i) $\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^2}$, j) $\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3}$.

DÚ DÚ DÚ

[$\frac{\vec{r}}{r}$, $2\vec{r}$, $3r\vec{r}$, $\frac{-\vec{r}}{r^3}$, $\frac{-2\vec{r}}{r^4}$, $\frac{-3\vec{r}}{r^5}$, $\vec{c}$, $\frac{r^2\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^3}$, $\frac{r^2\vec{c}-2(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^4}$, $\frac{r^2\vec{c}-3(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}$; zde i v následujících příkladech řešení s podmínkou $r \neq 0$, pokud výrazy při $r \to 0$ neomezeně rostou.]



$\vec{r}=(x,y,z)$

$\vec{c}$ - konstantní vektor

$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ $\quad |\vec{r}|=r$

$$\boxed{\nabla r = \left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)=\frac{1}{r}\vec{r}=\frac{\vec{r}}{r}}$$

$$\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{}}=\frac{x}{r}$$

analogicky pro

$$\nabla\frac{1}{r^m}=\nabla r^{-m}=\left(-\frac{mx}{r^{m+2}},-\frac{my}{r^{m+2}},-\frac{mz}{r^{m+2}}\right)=-\frac{m\vec{r}}{r^{m+2}}$$

$m=1$ $\quad$ Q v počátku

$$\approx -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{m}{2}}\right]=2x\cdot -\frac{m}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{m}{2}-1}=-mxr^{-m-2}=-\frac{mx}{r^{m+2}}$$

$\vec{c}$ – konstantní vektor

$$\nabla(\vec{c}\cdot\vec{r}) = \nabla(c_x x + c_y y + c_z z) = \vec{c}$$

$$\nabla\vec{r} = \overleftrightarrow{I} \qquad \vec{c}\cdot\overleftrightarrow{I} = \vec{c}$$

$$\nabla(\vec{r}\cdot\vec{c}) = \nabla\vec{r}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\nabla\vec{r} = \vec{c}$$

$$f = \vec{c}\,\vec{r}\,;\quad g = r^{-3}$$

$$\nabla\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3} = \left(-3\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^5}x + \frac{c_x}{r^3},\ -3\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^5}y + \frac{c_y}{r^3},\ -3\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^5}z + \frac{c_z}{r^3}\right)$$

$$= \frac{1}{r^3}(c_x, c_y, c_z) - 3\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^5}(x, y, z) =$$

$$= \frac{\vec{c}}{r^3} - 3\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r}$$

$$\text{1. složka} = \frac{\partial\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\left(c_x x + c_y y + c_z z\right)\right)$$

$$= (c_x x + c_y y + c_z z)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2} 2x \;+$$

$$+ \left(x^2 \ldots\right)^{-3/2} \cdot c_x = \vec{c}\cdot\vec{r}\,(-3)\,x\,r^{-5} + r^{-3} c_x$$

$$= -3\frac{x\,\vec{c}\,\vec{r}}{r^5} + \frac{c_x}{r^3}$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f = \vec{c}\,\vec{r}\,\nabla r^{-3} + r^{-3}\nabla(\vec{c}\,\vec{r}) =$$

$$= -3\frac{\vec{r}}{r^5}\vec{c}\,\vec{r} + \frac{1}{r^3}\vec{c} = \frac{\vec{c}}{r^3} - 3\frac{\vec{c}\,\vec{r}}{r^5}\vec{r}$$

Určete divergenci a rotaci následujících vektorových polí:

a) $\vec{r}$, b) $\dfrac{\vec{r}}{r}$, c) $\dfrac{\vec{r}}{r^2}$, d) $\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, e) $\dfrac{\vec{c}}{r}$.

DÚ

[$3, \vec{0}$; $\dfrac{2}{r}$, $\vec{0}$; $\dfrac{1}{r^2}$, $\vec{0}$; $0, \vec{0}$; $-\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3}$, $\dfrac{\vec{c}\times\vec{r}}{r^3}$]. Všimněme si zejména příkladu d), který odpovídá Coulombově poli bodového náboje, umístěného v počátku souřadnic. Toto pole má všude kromě počátku div $\vec{F} = 0$ v souladu s Poissonovou rovnicí. Naproti tomu lze dokázat i opačně, že jediné pole, které vyhoví této podmínce je právě pole Coulombovo. Rozložíme-li totiž obecné pole $\vec{F}$ do mocninné řady se zápornými exponenty (pole neomezeně roste při $r \neq 0$) a najdeme divergenci obecného členu této řady:

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^\alpha} = \frac{\operatorname{div}\vec{r}}{r^\alpha} + \vec{r}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r^\alpha} = \frac{3-\alpha}{r^\alpha} = 0$$

, zjistíme, že jediný nenulový člen této řady odpovídá $\alpha = 3$, tedy právě Coulombově poli.]

$$\nabla\cdot\vec{r} = 3$$

$$\nabla\cdot f\vec{A} = \nabla\cdot f_c\vec{A} + \nabla\cdot f\vec{A}_c = f\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla f$$

$f = r^{-m}$, $\vec{A} = \vec{r}$

$$\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^m} = r^{-m}\underbrace{\nabla\cdot\vec{r}}_{3} + \vec{r}\cdot\nabla r^{-m} = \frac{3}{r^m} + -\frac{m}{r^{m+2}}\vec{r}\cdot\vec{r} = \frac{3}{r^m} - \frac{m}{r^m}$$

$m = 3$ $\quad \nabla\cdot\dfrac{\vec{r}}{r^3} = 0$

$$\nabla\times f\vec{A} = \nabla f\times\vec{A}$$

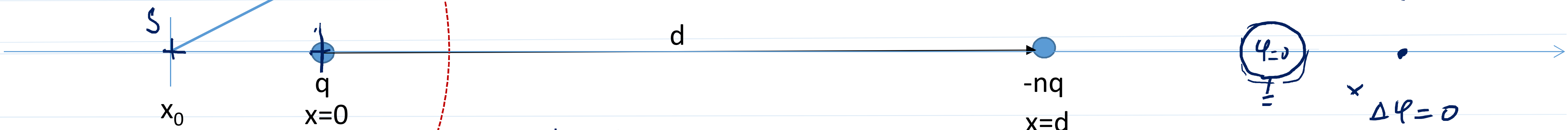
$$\nabla\times\vec{r} = 0$$

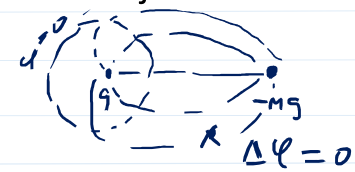
$$\nabla\times\frac{\vec{r}}{r^m} = \nabla\times\frac{\vec{r}_c}{r^m} + \nabla\times\frac{\vec{r}}{r_c^m} = -\vec{r}_c\times\nabla r^{-m} + r_c^{-m}\,\nabla\times\vec{r} = -\vec{r}\times\left(-\frac{m\vec{r}}{r^{m+2}}\right) + \frac{1}{r^m}\cdot 0 = 0$$

$$\nabla\times\frac{\vec{c}}{r^m} = -\vec{c}\times\nabla r^{-m} = \frac{\vec{c}\times\vec{r}}{r^{m+2}}$$

1.1.9. Poměr velikostí dvoubodových nábojů opačných znamének je n, vzdálenost obou nábojů je d. Dokažte, že povrch nulového potenciálu je kulová plocha. Vypočítejte poloměr R této plochy a vzdálenost jejího středu od jednoho z nábojů.

$$R = \frac{dm}{m^2-1} \qquad m>1 \qquad \varphi = 0$$





$$(x-x_0)^2+y^2+z^2=R^2$$

$$x_0 = -\frac{d}{m^2-1}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i(\vec{r})$$

$$\varphi_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

$i=2$

$$\vec{r}_1 = (0,0,0) \qquad \vec{r}_2 = (d,0,0)$$

$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{qm}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = m\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} \quad /^2 \quad 1/x$$

$$m^2(x^2+y^2+z^2) = (x-d)^2+y^2+z^2$$

$$(m^2-1)(y^2+z^2)+m^2x^2 - \underbrace{(x-d)^2}_{-x^2+2xd-d^2} = 0$$

$$(m^2-1)x^2+2xd-d^2+(m^2-1)(y^2+z^2)=0$$

$$\underbrace{x^2+\frac{2xd}{m^2-1}-\frac{d^2}{m^2-1}}_{(x-x_0)^2-R^2}+y^2+z^2=0$$

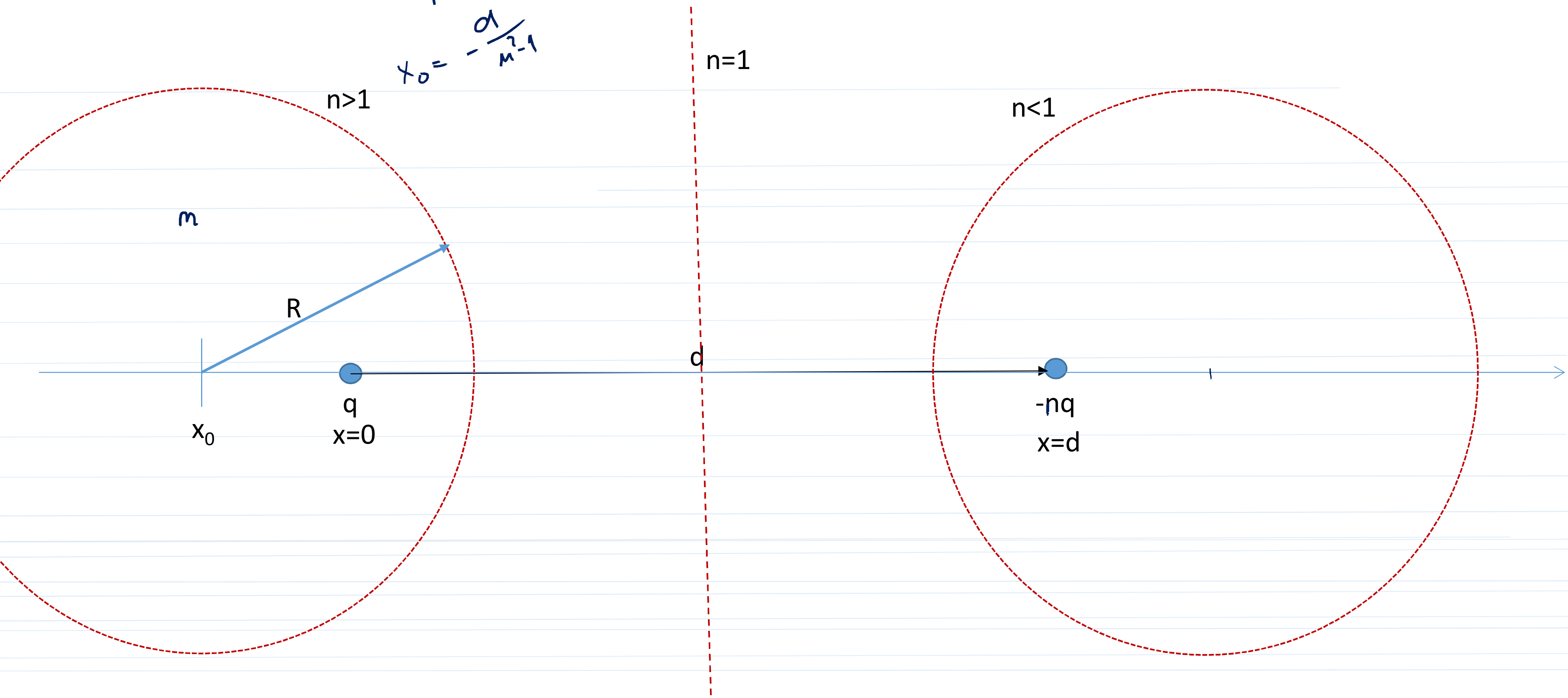
$$\left(x+\frac{d}{m^2-1}\right)^2-\frac{d^2}{(m^2-1)^2}-\frac{d^2}{m^2-1}+y^2+z^2=0$$

$$\left(x+\frac{d}{m^2-1}\right)^2+y^2+z^2 = d^2\left[\frac{1}{(m^2-1)^2}+\frac{1}{m^2-1}\right] = \frac{d^2m^2}{(m^2-1)^2}$$

1.1.9. Poměr velikostí dvoubodových nábojů opačných znamének je n, vzdálenost obou nábojů je d. Dokažte, že povrch nulového potenciálu je kulová plocha. Vypočítejte poloměr R této plochy a vzdálenost jejího středu od jednoho z nábojů.

$$R = \frac{nd}{n^2-1}$$

$$x_0 = -\frac{d}{n^2-1}$$



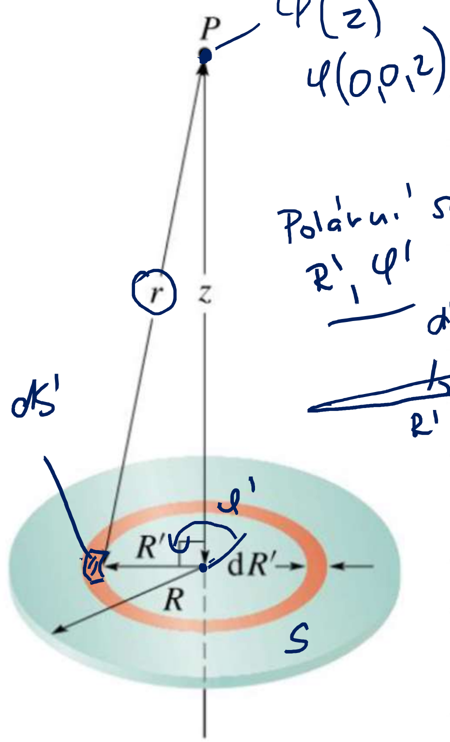
S 1.1.17

Kruhový ebonitový disk o poloměru R, který má na svém horním povrchu rovnoměrně rozložený kladný náboj o plošné hustotě σ.
Jaký je **potenciál elektrického pole** v bodě P?

na ose

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}')\,dS'}{\underbrace{|\vec{r}' - \vec{r}_i|}_{r}} \qquad dS' = dx'dy'$$

$$d\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overbrace{\sigma dS'}^{dQ}}{r}$$



Polární souř
R', φ'

$dS' = R'd\varphi'dR'$

$R' \cdot d\varphi'$

$$d\varphi_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS'}{\sqrt{R'^2+z^2}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma}{\sqrt{R'^2+z^2}}R'd\varphi'dR'$$

$$\varphi_z = \int_S d\varphi_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\overbrace{\frac{\sigma R'}{\sqrt{R'^2+z^2}}dR'}^{f(R')}d\varphi' =$$

φ' R'

R' $0 \Rightarrow R$

φ' $0 \to 2\pi$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma R'}{\sqrt{R'^2+z^2}}dR' \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi'}_{2\pi} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{2R'}{2\sqrt{R'^2+z^2}}dR' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R'^2+z^2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{z^2}\right]$$

$|z|$

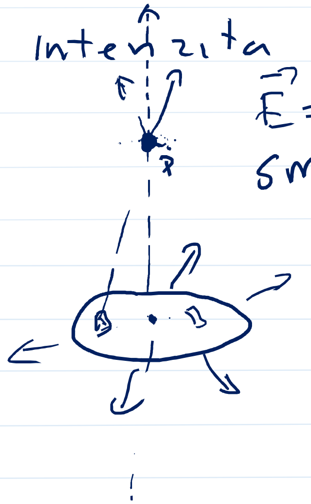
$t = R'^2 + z^2$

$dt = 2R'dR'$

$$\int \frac{1}{2}t^{-1/2}\,dt \to t^{1/2}$$

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right]$$

Intenzita



$\vec{E} = -\nabla\varphi$

směr osy z $\Rightarrow$ $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

$z>0$

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[2z\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - 1\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{z^2}+1}} \to 0$$

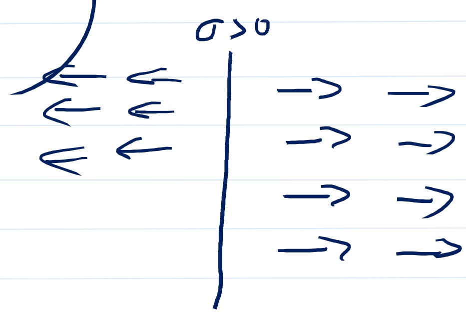
$z<0$

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{}}\right)$$

$z>0$ $\quad R\to\infty$

nabitá rovina, nekonečná

$$E_z \to \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



S1.1.19-1.1.20 Určete pomocí Gaussova zákona průběhy Intenzity a potenciálu a pole v okolí následujících homogenně nabitých objektů:

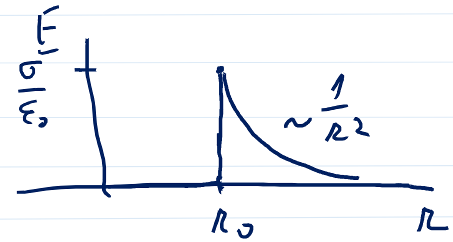
a) kulová slupka o poloměru r_0

ρ b) koule, DÚ nabitá obj. nábojem ohust. ρ

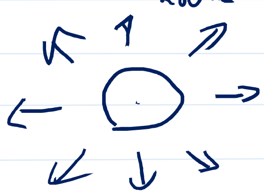
c) válcová plocha a válec DÚ

radiální

ze symetrie



a)



$\underline{E} = \underline{E}(r)$ r vzd. od středu

$\vec{E} \perp$ koule se středem S

$\Downarrow$

$\vec{E} \parallel d\vec{S}$

a)

$r > r_0$ S - kulová plocha o poloměru r

z G. z.

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_c}{\varepsilon_0}$$

uzavřený v kouli o pol. r

$\Leftarrow Q_c = \sigma \cdot 4\pi r_0^2$

$$\Phi_S = \int_S E\, dS = E \int_S dS = E\, 4\pi r^2 = \frac{\sigma\, 4\pi r_0^2}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r_0^2}{r^2}$$

b)

$r < r_0$ - uvnitř

tok

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q_c}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow E = 0$$