3. cvičení z PSt — 16.3.2021

Hrátky s náhodnými veličinami

1. Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu $p = 1/10$, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.

(a) Jaká je $P(X > k)$?

(b) Jaká je distribuce X? Tj. určete pravděpodobnostní funkci p_X, tj. pro každé x určete $P(X = x)$.

(c) Jaká je $P(X \geq 10 \mid X \geq 5)$?

(d) Jaká je $\mathbb{E}(X)$?

V poslední části se vám bude hodit následující vzorec (bude na příští přednášce): Nechť X je diskrétní n.v. nabývající jen hodnot z $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Pak platí

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n).}$$

2. Pokračování z minulé úlohy: označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y.

3. Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost q, že se trefí. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z.

4. Nechť $X \sim Bin(m, p)$ a $Y \sim Bin(n, p)$ jsou n.n.v. Pak $X + Y \sim Bin(m + n, p)$.

5. Nechť $X = X_1 + \dots + X_n$, kde pro každé i je $X_i \sim Bern(p)$. Pokud jsou veličiny $X_1, \dots, X_n$ nezávislé, říkali jsme si na přednášce, že $X \sim Bin(n, p)$ (zatím bez definice nezávislých veličin ...). Ukažte na příkladu, že pokud omezení na nezávislost neuvedeme (tj. chceme jen $X_i \sim Bern(p)$), tak X může mít i jiné rozdělení.

6. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n rublů. Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

7. V pytlíku N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme dva, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.

(a) Určete $\mathbb{E}(X)$.

(b) Můžete i napřed řešit pro tažení jen jednoho bonbónu.

(c) Jak se jmenuje rozdělení n.v. X?

(d) * A co když vytáhneme tři, čtyři, ..., n bonbónů?

8. Nechť X má uniformní rozdělení na množině $\{a, a + 1, a + 2, \dots, b\}$ (pro celá čísla $a < b$). Určete $\mathbb{E}(X)$ a $var(X)$. Rozptyl je trochu ošklivý na dopočítávání, připomeňte si vzorec z diskrétky na součet druhých mocnin – nebo se omezte na konkrétní příklad $a = 1, b = 6$. Připomeňte si vzorec z přednášky:

$$\boxed{var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

Pokud budete hotovi, doporučuji bonusové příklady z minula.

K procvičení

9. Na dvanáctistěnné kostce je jedna stěna označena jedničkou, dvě dvojkou, čtyři čtyřkou a pět pětkou, všechny stěny padají stejně často. Označíme X výsledek jednoho hodu. Spočítejte $\mathbb{E}(X)$ a $var(X)$, vyčíslete taky tzv. *směrodatnou odchylku*, která je definovaná jako $\sigma_X = \sqrt{var(X)}$.

10. Hugo upravil svoji hrací kostku tak, že ze čtyřky udělal druhou šestku; všechny stěny padají stejně často. Označíme X výsledek jednoho hodu. Spočítejte $\mathbb{E}(X)$ a $var(X)$, vyčíslete taky tzv. *směrodatnou odchylku*, která je definovaná jako $\sigma_X = \sqrt{var(X)}$.