3. CVIČENÍ – SUBSTITUCE

Př $x' = \sin(x+t)$ $\qquad x(t)$

subst $z(t) = x(t) + t$

$z'(t) = x'(t) + 1 \qquad x'(t) = z'(t) - 1$

dosadím do rovnice:

$z'(t) - 1 = \sin z$

$z' = \sin z + 1$ ... separované proměnné ⇝ umím řešit.

1. Homogenní rovnice

$x' = f(t,x)$

$f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x)$

Př $t^2x' + tx = t^2 + x^2$ $\qquad$ pro $t \neq 0$ vydělím t^2

$x' + \frac{x}{t} = 1 + \frac{x^2}{t^2}$

$\boxed{z = \frac{x}{t} \text{ nebo } x = z \cdot t, \quad x' = z't + z \cdot 1}$

$x' = 1 - \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^2}$

dosadím:

$z't + z = 1 - z + z^2$

$z' = \frac{1}{t}(1 - 2z + z^2)$ ... rovnice se separovanými proměnnými

$\frac{z'}{(z-1)^2} = \frac{1}{t} \quad /\int$

$-\frac{1}{z-1} = \ln|t| + c$

$z - 1 = \frac{1}{-\ln|t| - c} = -\frac{1}{\ln|t| + c}$

$z = 1 - \frac{1}{\ln|t| + c}$

$x(t) = t\left(1 - \frac{1}{\ln|t| + c}\right), t \in \ldots$

2. Bernoulliovy rovnice

$$x' + a(t)x = b(t)x^{\alpha}$$

a, b dané funkce
bez x^{α} by se jednalo o lineární rovnici

Př $\quad x' - \frac{4x}{t} = t\sqrt{x}$

$$\boxed{z = x^{1-\alpha}}$$

$a(t) = \frac{1}{t}$, $b(t) = t$, $\alpha = \frac{1}{2}$

$$z = x^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$z' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x'$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} x' - \frac{4x}{2\sqrt{x}\,t} = \frac{t\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

dosadím:

$$z' - \frac{2z}{t} = \frac{t}{2} \quad \ldots \text{ lineární rovnice}$$

⋮ vyřešíme

$z = \frac{t^2}{2}\ln|t| + ct^2 \;\ldots\; t \in D_z$, navíc $z \geq 0$!

$$x(t) = \left(\frac{t^2}{2}\ln|t| + ct^2\right)^2, \; t \in \ldots$$

3. Rovnice typu $\quad x' = \frac{ax + bt + c}{dx + et + f}$

Př $\quad x' = \frac{2t - x + 1}{t - 2x + 1}$

$$\boxed{T = t + A,\; X = x + B}$$

dosadíme:

$$X' = x' = \frac{2t - x + 1}{t - 2x + 1} = \frac{2(T-A) - (X-B) + 1}{T - A - 2(X-B) + 1} =$$

$$= \frac{2T - X - 2A + B + 1}{T - 2X - A + 2B + 1}$$

$-2A + B + 1 = 0$
$-A + 2B + 1 = 0$

$$\boxed{A = \frac{1}{3},\; B = -\frac{1}{3}}$$

$$X' = \frac{2T - X}{T - 2X}$$

je HOMOGENNÍ! umíme řešit

Pr

1. $x' = e^{\frac{x}{t}} + \frac{x}{t}$

2. $x' - 2tx = 2t^3x^2$