6.2. Integrace racionálních funkcí

Definice Racionální funkcí rozumíme podíl dvou polynomů $\frac{P}{Q}$, kde Q není nulový polynom.

Věta (základní věta algebry) Nechť $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_j \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Pak existují $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ tak, že
$$P(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$x^2 + 1 = (x+i) \cdot (x-i)$$

$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$

$$(x - z)^k \cdot (x - \bar{z})^k = \left(x^2 - (z + \bar{z}) \cdot x + z \cdot \bar{z}\right)^k = \left(x^2 - \overset{\mathbb{R}}{2a} x + \overbrace{a^2 + b^2}^{\in \mathbb{R}}\right)^k$$

Lemma (o komplexních kořenech polynomu)
Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbb{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbb{N}$. Pak i $\bar{z}$ je kořen násobnosti k.

Dk: $(\bar{z})^k = \overline{(z^k)} = \overline{(r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi))^k} = \overline{r^k \cdot (\cos k\varphi + i \sin k\varphi)} =$
$= r^k \cdot (\cos k\varphi + i \cdot \sin(-k\varphi)) = r^k \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin(-\varphi))^k = (\bar{z})^k$

Důkaz matematickou indukcí podle k.

$k=1$ z je kořen $P(z)=0$

$$0=\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{a_n}\cdot\overline{(z^n)} + \dots + \overline{a_1}\cdot\overline{z} + \overline{a_0} =$$

($a_j \in \mathbb{R}$)

$$= a_n\cdot(\overline{z})^n + \dots + a_1\overline{z} + a_0 = P(\overline{z}) \Rightarrow \overline{z} \text{ je kořen.}$$

$k \to k+1$ z je kořen násobnosti alespoň $k+1$.

z MI víme, že $\overline{z}$ je kořen násobnosti alespoň k

Pokud $z\in\mathbb{R}$, $z=\overline{z}$ $\Rightarrow$ tvrzení platí. Dále $z\neq\overline{z}$, $z\notin\mathbb{R}$

$$P(x)=(x-z)^k\cdot(x-\overline{z})^k\, Q(x) = (x^2-\underbrace{(z+\overline{z})}_{\in\mathbb{R}}\cdot x + \underbrace{z\cdot\overline{z}}_{\in\mathbb{R}})^k\cdot Q(x)$$

$$= (x^2+\underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{R}} x + \underbrace{\beta}_{\in\mathbb{R}})^k\cdot Q(x) \Rightarrow Q \text{ má reálné koeficienty.}$$

a navíc $Q(z)=0$ (neboť z je $(k+1)$-násobný kořen).

$\Rightarrow Q(\overline{z})=0$ z 1. kroku MI. $\Rightarrow$ $\overline{z}$ je $(k+1)$ násobný kořen

$\square$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-1)^2\cdot(x+2)^3\cdot(x^2+1)^5\cdot(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1} + \quad + \quad + \dots$$

„Každou racionální umíme zintegrovat"

$\boxed{\text{Věta BD 6.8}}$ (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) stupeň P je ostře menší než stupeň Q,

(ii) $Q(x) = a_n \cdot (x-x_1)^{p_1} \cdots (x-x_k)^{p_k} \cdot (x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \cdots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n, x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

(iv) $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l \in \mathbb{N}$

(v) žádné dva z mnohočlenů $(x-x_1), \ldots, (x-x_k), (x^2+\alpha_1 x+\beta_1), \ldots, (x^2+\alpha_l x+\beta_l)$ nemají společný kořen

(vi) mnohočleny $x^2+\alpha_1 x+\beta_1, \ldots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají reálný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_j^i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, p_i\}$ a $B_j^i, C_j^i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, l\}$, $j \in \{1, \ldots, q_i\}$ tak, že platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \cdots + \frac{A_1^k}{x-x_k} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} +$$

$$+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \cdots$$

$$+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}.$$

Postup při integraci racionální funkce:

1. Vydělit polynomy $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_1(x)\,dx + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)}\,dx$,

   kde stupeň P_2 < stupeň Q a P_1 je polynom

2. Rozklad na parciální zlomky podle předchozí věty

3. Integrace parciálních zlomků: Stačí umět integrovat

   x^n, $\frac{1}{x^n}$, $\frac{2x}{(x^2+1)^k}$, $\frac{1}{(x^2+1)^k}$ a použít lineární substituci.

$$\int \frac{1}{x^n} \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} & \text{na } (-\infty,0) \text{ a } (0,\infty) \text{ pro } n>1 \\ \log|x| & \text{na } (-\infty,0) \text{ a } (0,\infty) \text{ pro } n=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^k}\,dx = \int \frac{1}{y^k}\,dy = \begin{cases} \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} & \text{na } \mathbb{R} \quad n>1 \\ \log|y| = \log(1+x^2) & \text{na } \mathbb{R} \quad n=1 \end{cases}$$

$$x^2+1=y \qquad \frac{dy}{dx}=2x$$

$I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$ jsme si počítali na konci minulé hodiny

Příklady: 1. Vydělte $\frac{x^4+1}{x^2+2x}$

$$\frac{x^4+1}{x^2+2x} = \underbrace{\frac{x^4+2x^3}{x^2+2x}}_{x^2} + \underbrace{\frac{-2x^3-4x^2}{x^2+2x}}_{-2x} + \underbrace{\frac{4x^2+8x}{x^2+2x}}_{4} + \frac{-8x+1}{x^2+2x} = x^2-2x+4+\frac{-8x+1}{x^2+2x}$$

2. typ integrálu $\int \frac{1}{x+1}\,dx \overset{c}{=} \ln|x+1|$ na $(-\infty;-1)$ a $(-1,\infty)$

3. typ integrálu $\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| \overset{c}{=} \ln(x^2+x+1) \quad \text{na } \mathbb{R}$$

$$\boxed{x^2+x+1 = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}}$$

$$y = x^2+x+1 \qquad \frac{dy}{dx} = 2x+1$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{4}} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$y = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \int \frac{1}{y^2+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,dy = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} y = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)$$

na $\mathbb{R}$

Celkem

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) \quad \text{na } \mathbb{R}$$

4. Spočtěte primitivní funkci $\int \frac{x^2+1}{(x+1)\cdot(x^2+x+1)}$ L 8-6

$$\frac{x^2+1}{(x+1)\cdot(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad / \cdot (x+1)\cdot(x^2+x+1)$$

$$x^2+1 = A\cdot(x^2+x+1) + (Bx+C)\cdot(x+1)$$

$$x^2+1 = Ax^2+Ax+A + Bx^2+Bx+Cx+C =$$

$$=(A+B)\cdot x^2 + (A+B+C)\cdot x + A + C$$

2 polynomy se rovnají $\Leftrightarrow$ rovnají se koeficienty u $1, x, x^2, x^3 \dots$

$1 = A+B$

$0 = A+B+C$ Tato soustava má řešení $\xrightarrow{\text{lineární algebra}}$ $A=2$, $B=-1$, $C=-1$

$1 = A+C$

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)\cdot(x^2+x+1)} = \int \frac{2}{x+1}\,dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$\stackrel{c}{=} 2\cdot\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctan}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) \quad \text{na } (-\infty,-1) \text{ a } (-1,\infty)$$

RADA – výpočet lze zrychlit: ~~dosaď~~ dosaďte kořeny

$$(x^2+1) = A\cdot(x^2+x+1) + (Bx+C)\cdot(x+1)$$

$$2 = A\cdot(1-1+1) + (Bx+C)\cdot 0 \Rightarrow \frac{x=-1}{A=2}$$

$x^2+1 = 2x^2+2x+1 + Bx^2+Bx+Cx+C \Rightarrow$ BUDU MÍT MENŠÍ SOUSTAVU.