Proces je prediktabilní, pokud je měřitelný vůči $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$

$\Omega \times [0,T]$ nejmenší σ-algebra obsahující

$A \times \{0\}$ $\quad$ $A \times (s,t]$

$A \in \mathcal{F}_0$ $\quad$ $A \in \mathcal{F}_s$

T. 13. Je-li proces $\mathcal{F}_t$-adapt. + zl. spojitý $\Rightarrow$ je $\mathcal{F}_t$-prediktabilní

Tvrzení 14: Stoch. proces X je $\mathcal{F}_t$-prediktabilní právě když X je měřitelný vůči nejmenší σ-algebře generované zleva spojitými $\mathcal{F}_t$-adaptovanými procesy.

Důkaz: $\mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$ nejmenší σ-algebra generovaná všemi spojitými $\mathcal{F}_t$-adaptovanými procesy.

Y je sl. sp. $\mathcal{F}_t$-adapt. $\quad \{(\omega,t);\ Y_t(\omega) \le a\} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_t) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Y je také predikovatelný dle tvrzení 13

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$$

$\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ je generována množinami $A \times \{0\}$, $A \times (s,t]$

$A \in \mathcal{F}_0 \qquad A \in \mathcal{F}_s$

Vezmeme si libovolné dělení intervalu $[0,T]$ $\quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$

a množiny $A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ $\quad i = 0, \dots, n$

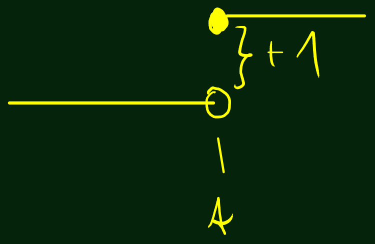
$$J_t(\omega) = 1_{A_0}(\omega)\cdot 1_{[t=0]} + \sum_{i=0}^{n-1} 1_{A_i}(\omega)\cdot 1_{(t_i,\, t_{i+1}]}(t)$$

jednoduchý zleva spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces je $\mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$ měřitelný

je složen z indikátorů generujících množin $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{L}(\mathcal{F}_t).$$

Zprava spojitý proces obecně $\mathcal{F}_t$-predikabilní být nemusí.



Lemma 15: Buď $\{\mathcal{F}_t\}$ filtrace. Pak $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ je generována takovými množinami typu

$A \times \{0\}$ $\qquad$ $A \times [s, t)$

$\in \mathcal{F}_0$ $\qquad$ $\in \mathcal{F}_{s-}$

Porovnejte s množinami

$A \times \{0\}$ $\qquad$ $A \times (s, t]$

$\in \mathcal{F}_0$ $\qquad$ $\in \mathcal{F}_s$

Doobův - Meyerův rozklad pro submartingaly.

Věta 16: (Doobův - Meyerův rozklad)

Buď $X = (X_t, t \in [0,T])$ zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný nezáporný submartingal.

Pak existuje zprava spojitý $\mathcal{F}$-martingal M

a zprava spojitý neklesající $\mathcal{F}_t$-predikovatelný A takové, že

- $EA_t < \infty$, $A_0 = 0$ s.j.

a $\boxed{X_t = M_t + A_t}$ a tento rozklad je jednoznačný až na modifikac

(Pokud je navíc X omezený, pak M je stejnoměrně integrovatelný a A je integrovatelný – to je důležité, uvažujeme-li $t \in [0,\infty)$)

$N_t,\ t \in [0,T]$ čítací proces

- submartingal
- zprava spojitý
- neklesající

řídící martingal

$N_t = 0 + N_t$ nesplňuje podmínku prediktability

Důsledek 17: Buď $N = (N_t, t \in [0,T])$ čítací proces, N je adaptovaný na $\{\mathcal{F}_t\}$, pak existuje až na modifikaci jediný rozklad

$N = M + A$, M je martingal ($\mathcal{F}_t$-ad., zpr. spojitý)

A je neklesající, $\underline{A_0 = 0}$ ($\mathcal{F}_t$-$\underline{\text{predikovatelný}}$, zpr. spojitý)

Poissonův proces (homogenní)

$N_t \sim Po(\lambda t)$ $\qquad P[N_t - N_s = k] = e^{-\lambda(t-s)} \cdot \dfrac{(\lambda(t-s))^k}{k!}$ $\quad k = 0, 1, 2, \dots$

$M_t = N_t - \lambda t \qquad N_t = M_t + \lambda t$

spojitý deterministický

$\mathcal{F}_t$-prediktabilní

adapt. na jakoukoliv filtraci

$\lambda \in (0,\infty)$

$E N_t = \lambda t < \infty \Rightarrow E|N_t - \lambda t| \le E N_t + \lambda t = 2\lambda t < \infty$

M_t zdědí adaptovanost po N_t

$$E[N_s|\mathcal{F}_s] \overset{s.j.}{=}$$

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] = E[N_t - \lambda t|\mathcal{F}_s] = E[N_t - N_s|\mathcal{F}_s] + N_s - \lambda t = (*)$$

kan. filtrace N nebo $N_t - N_s$ je nezávislé s $\mathcal{F}_s$ $\forall\ 0 \le s < t \le T$

$$E[N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s] = E(N_t - N_s) = \lambda(t-s)$$

$$\circledast \quad \lambda(t-s) + N_s - \lambda t = N_s - \lambda s = M_s$$

M martingal $\quad M^2 \quad (\cdot)^2$ je konvexní. Pro φ konvexní máme

$$\underbrace{E[\varphi(X) \mid \mathcal{G}]}_{\text{má smysl pokud } E|\varphi(X)| < \infty} \geq \varphi(E[X \mid \mathcal{G}])$$

$$E M_t^2 < \infty$$

$$E[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] \geq \Big(\underbrace{E[M_t \mid \mathcal{F}_s]}_{M_s}\Big)^2 = M_s^2$$

$(M_t^2,\ t \in [0,T])$ je submartingal

__Důsledek 18:__ Buď M spojitý zprava $\mathcal{F}_t$-martingal $EM_t^2 < \infty$. Pak existuje až na modifikaci jediný $\mathcal{F}_t$-prediktabilní neklesající proces A, $A_0 = 0$, takový, že $M^2 - A$ je martingal

Proces A z důsledku 18 je důležitým procesem pro L_2-martingal M, značíme jej $\langle A, A \rangle$ a nazývá se PREDIKTABILNÍ (KVADRATICKÁ) VARIACE martingalu M.