(Ne)isomorfismy okruhů

V úlohách využívám toho, že „už vím“, že $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ a $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Všimněte si, že jsem si vždycky mohl zvolit, „odkud kam“ mi isomorfismus vede – to je proto, že inverzní zobrazení k isomorfismu je opět isomorfismus. Obě volby vždycky fungují, rozdíl je typicky jen v tom, kolikrát napíšete $^{-1}$.

(1) $\mathbb{Q}$ není isomorfní $\mathbb{Q}[x]$: Okruh isomorfní tělesu je opět těleso (jak se „snadno dokáže“). Konkrétně v tomto případě např. kdyby existoval isomorfismus $\varphi\colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}$, tak jelikož je $\mathbb{Q}$ těleso, existoval by v něm inverzní prvek k $\varphi(x)$, tj. $\varphi(x)^{-1}$; potom $y = \varphi^{-1}\big(\varphi(x)^{-1}\big)$ (pozor na dvojí význam $^{-1}$, jednou inverzní zobrazení, jednou inverzní prvek) je prvek $\mathbb{Q}[x]$ splňující $y \cdot x = 1$, ovšem takový prvek v $\mathbb{Q}[x]$ neexistuje – součin x s nenulovým polynomem musí být polynom stupně aspoň 1. Rozepsáno:

$$y \cdot x = \varphi^{-1}\big(\varphi(x)^{-1}\big) \cdot x = \varphi^{-1}\big(\varphi(x)^{-1}\big) \cdot \varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x)^{-1} \cdot \varphi(x)\big) = \varphi^{-1}(1) = 1.$$

(V posledním kroku se využilo to, že φ^{-1} je také isomorfismus, tedy rovněž zachovává jednotku).

(2) $\mathbb{Q}$ není isomorfní $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$: Kdyby existoval isomorfismus $\varphi\colon \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}$, tak

$$\varphi\big(\sqrt{2}\big)^2 \overset{(1)}{=} \varphi\big((\sqrt{2})^2\big) = \varphi(2) = \varphi(1+1) \overset{(2)}{=} \varphi(1) + \varphi(1) \overset{(3)}{=} 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Q},$$

kde (1) je protože isomorfismy zachovávají součiny (a tedy i mocniny), (2) protože isomorfismy zachovávají součty a (3) protože isomorfismy zachovávají jednotku.[1] Ovšem žádný prvek $\mathbb{Q}$ po umocnění na druhou nedá 2.

(3) $\mathbb{Q}$ není isomorfní $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ se dokáže obdobně.

(4) $\mathbb{Q}[x]$ není isomorfní $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ani $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$: Možná nejjednodušší tady je ukázat, že $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ a $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ jsou tělesa, a použít stejný argument jako v prvním bodě. Je to snadné:

$$(a+b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \quad \text{a} \quad (a+b\sqrt{3})^{-1} = \frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}].$$

Alternativně se dá postupovat jako ve (2) a nahlédnout, že žádný polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$ nesplňuje $p^2 = 2$, což by musel splňovat hypotetický $p = \varphi(\sqrt{2})$ při existenci isomorfismu $\varphi\colon \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[x]$.

(5) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ není isomorfní $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$: Podobně jako v bodu (2) chceme podchytit to, že zatímco v $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ má rovnice $x^2 - 2 = 0$ řešení, v $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ nemá. Existoval-li by isomorfismus $\varphi\colon \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, pak podobně jako v (2) dojdeme k tomu, že $y = \varphi(\sqrt{2})$ je prvek $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ splňující $y^2 = 2$. Že takový prvek neexistuje lze ukázat dvěma způsoby (které jsou v zásadě jeden a ten samý):

- (i) Přímý útok: Je-li $y = a + b\sqrt{3}$ (kde $a, b \in \mathbb{Q}$) a splňuje $y^2 = 2$, pak $a^2 + 2ab\sqrt{3} + 3b^2 = 2$, neboli $2ab\sqrt{3} = 2 - a^2 - 3b^2$. Pokud není ab nula, tak na levé straně je iracionální číslo, zatímco na pravé je racionální – musí tedy být $a = 0$ nebo $b = 0$. V obou případech však dostaneme spor: žádné $a, b \in \mathbb{Q}$ nesplňují $a^2 = 2$ ani $3b^2 = 2$ (tj. $b^2 = 2/3$) (neexistence b se dokáže prakticky úplně stejně jako a).
- (ii) Argument „nadokruhem“: $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ je podokruh $\mathbb{R}$, o kterém víme, že rovnice $y^2 = 2$ má řešení pouze $y = \pm\sqrt{2}$. Jakékoliv řešení této rovnice v $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ by bylo řešením i v $\mathbb{R}$, takže nám stačí ukázat, že $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Kdyby tomu tak bylo, např. $\sqrt{2} = a + b\sqrt{3}$ pro $a, b \in \mathbb{Q}$, tak bychom postupem stejným jako v (i) dostali stejný spor.

[1] „Zachovávání jednotky“ sice striktně vzato není součástí definice isomorfismu, ale snadno se pro okruhy s jednotkou dokáže: Je-li $\varphi\colon R \to S$ isomorfismus, pak pro všechna $s \in S$ platí $s \cdot \varphi(1) = \varphi(\varphi^{-1}(s)) \cdot \varphi(1) = \varphi(\varphi^{-1}(s) \cdot 1) = \varphi(\varphi^{-1}(s)) = s$ a prvek s touto vlastností je v (komutativním) okruhu jediný – pouze jednotka.