ApDR – 2. PŘEDNÁŠKA

Několik poznámek k jednodruhovým modelům

$$x'(t) = r(x(t),t)\,x(t)$$

- rozmnožují se jen dospělí jedinci ...

$$x'(t) = r \cdot x(t-d)$$ rovnice se zpožděním

← počet dospělých jedinců

- r závisí na věku

$$x'(t) = r_1\left[x(t-40) - x(t-50)\right] + r_2\left[x(t-30) - x(t-40)\right] + \dots + r_5\left[x(t-20) - x(t-10)\right]$$

$$x'(t) = \int_0^t r(s)\,x(t-s)\,ds$$ ... integrodiferenciální rovnice

r konvoluční jádro

- čas t spojitý × diskrétní

spojitý ... diferenciální rovnice

diskrétní ... diferenční rovnice

$$x(t+1) = x(t) + r\cdot x(t) \quad \dots\ t \in \mathbb{N}$$

řešení x je posloupnost

MINULE: Lotkův – Volterrův model

dravec – kořist

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= (r - ky)\,x \\ y' &= (-h + px)\,y \end{aligned}}$$

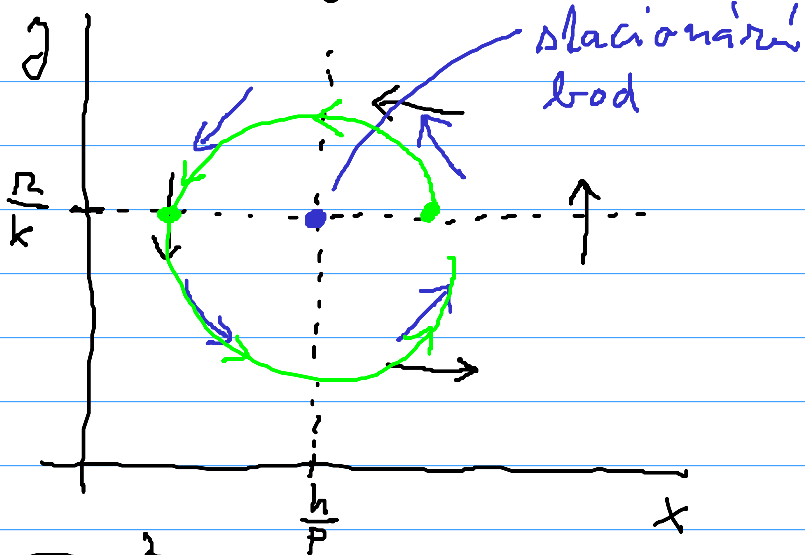
x ... populace kořisti

y ... populace dravců

Biolog Ancona: Proč se po 1. světové válce zvýšil podíl dravých ryb v úlovcích rybářů?

fázový diagram

$$x' = kx\left(\frac{r}{k} - y\right)$$
$$y' = py\left(x - \frac{h}{p}\right)$$



$x, y > 0$

$x' > 0 \iff y < \frac{r}{k}$

$y' > 0 \iff x > \frac{h}{p}$

?

a) b) c)

?

c) je správně

<u>Pozorování</u>: Průměrné množství kořisti za čas periody je rovno $\frac{h}{p}$; průměrné množství predátorů je $\frac{r}{k}$.

<u>Dk</u>: $x' = kx\left(\frac{r}{k} - y\right) \quad / : x$

$$\frac{x'}{x} = k\left(\frac{r}{k} - y\right) \quad / \int_0^T dt \text{, kde } T \text{ je perioda}$$

$$\underbrace{\Big[\ln x(t)\Big]_0^T}_{=0} = r \cdot T - k \int_0^T y(t)\,dt$$

$x(T) = x(0)$

$$rT = k \int_0^T y(t)\,dt$$

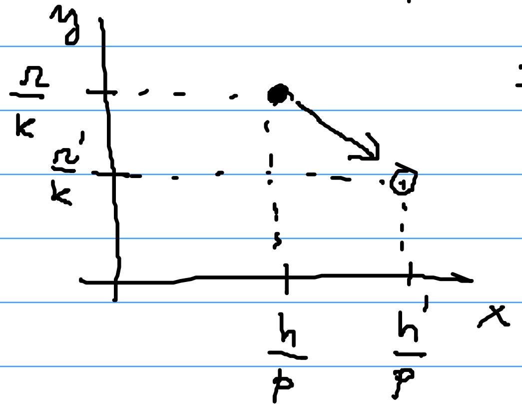
$$\frac{r}{k} = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt}_{\text{střední hodnota množství predátorů}}$$

a pro kořist podobně □

Co se stane, když se zhorší podmínky v moři?

$r \downarrow \quad h \nearrow$

- znečištění ; - rybolov



Zhoršení podmínek $\Rightarrow$ relativně více kořisti a méně dravců

Volterrův princip: V systémech s negativní zpětnou vazbou (typu dravec–kořist) vede zhoršení životního prostředí k relativnímu poklesu počtu dravců a relativnímu nárůstu populace kořisti.

I.3 Hollingův–Tannerův model

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \left(r\left(1-\frac{x}{k}\right) - \frac{my}{A+x}\right)\cdot x \\ y' &= s\left(1-\frac{Py}{x}\right) y \end{aligned}}$$

$r, k, m, A, s, P > 0$

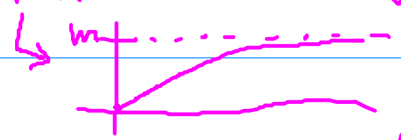
logistický model pro populaci kořisti

logistický model pro populaci dravce kde kapacita prostředí je $\frac{x}{P}$

P... výživnost kořisti

$\frac{mx}{A+x}\cdot y$ x malé ... $\sim \frac{m}{A}xy \sim$ L-V model.

$x \to \infty \quad \frac{mx}{A+x} \to m \quad my$

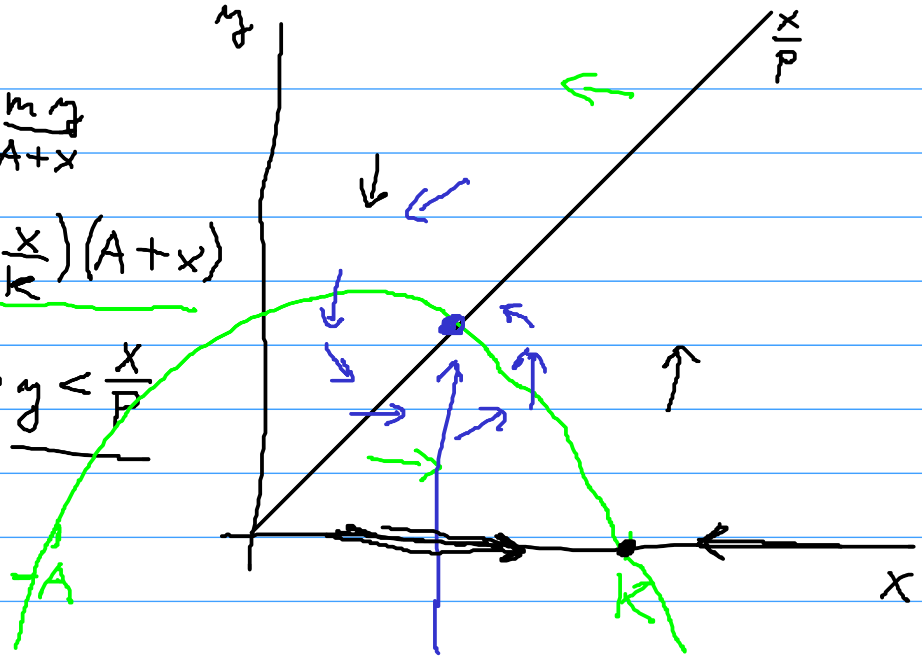


omezenost shora ... dravec se nasytí

$x' > 0 \iff r\left(1-\frac{x}{K}\right) > \frac{my}{A+x}$

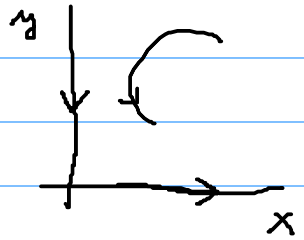
$\iff y < \frac{r}{m}\left(1-\frac{x}{K}\right)(A+x)$

$y' > 0 \iff \frac{Py}{x} < 1 \iff y < \frac{x}{P}$



rovnovážný stav = ekvilibrium = stacionární bod

Pozor: • U L-V existovala řešení na osách



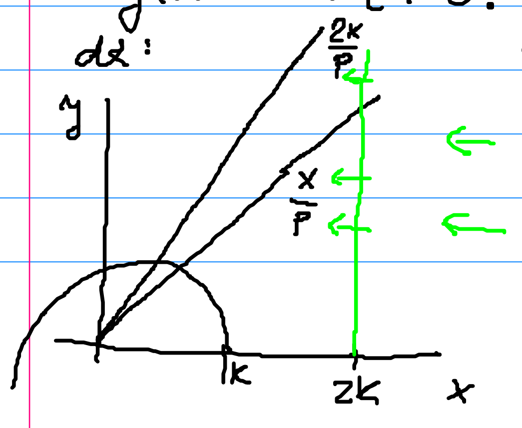
z jednoznačnosti ⇒ řešení v 1. kvadrantu zůstanou v 1. kvadrantu (otevřeném → neryhymou)

• U H-T osa y nepatří do Ω

⇒ není jasné, zda řešení nedojdou na osu y.

Věta: Pro každou počáteční podmínku $(x_0, y_0) \in (0,+\infty)^2$ existuje právě jedno řešení (HT) definované na $[0,+\infty)$. Toto řešení je omezené a $x(t)>0$, $y(t)>0$ $\forall t \geq 0$.

dk:



• Pro $x > 2K$ máme $x' \leq -rx$

$$\frac{x'}{x} \leq -r \quad \Big/ \int_0^t dt$$

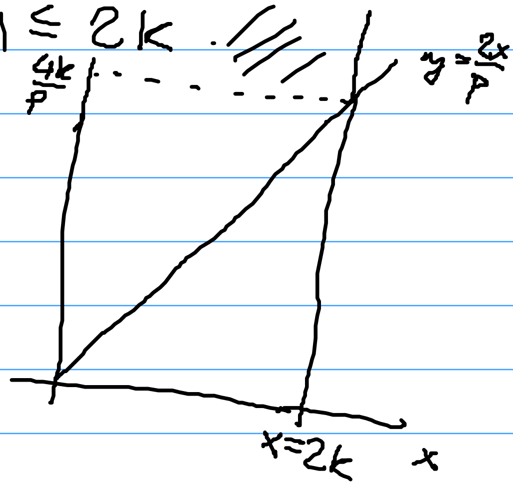
$$\ln x(t) - \ln x_0 \leq -rt$$

$$\ln x(t) \leq -rt + \ln x_0$$

$$x(t) \leq e^{-rt+\ln x_0} = e^{-rt} x_0$$

⇒ po konečném čase bude $x(t) \le 2K$

pak už navždy zůstane $x(t) \le 2K$.



Pro $y > \frac{4K}{p}$ a $x < 2K$

$\Rightarrow y > \frac{2x}{p}$

$y' \le -\varepsilon y$

$y(t) \le e^{-\varepsilon t} y_0$

... po konečném čase bude $y(t) \le \frac{4K}{p}$

⇝ Po konečném čase se řešení dostane do obdélníku $(0, 2K) \times [0, \frac{4K}{p}]$

z jednoznačnosti ⇒ na osu x se nenapojíme, ani přes ni nepřejdeme (v konečném čase)
totéž platí pro pravou a horní stranu obdélníka ... jediný problém je levá strana.

Potřebujeme vyloučit, že v konečném čase

$$\lim_{t \to T} x(t) = 0$$

V obdélníku platí $x'(t) \ge -C x(t)$

$$x(t) \ge e^{-Ct} \tilde{x}_0$$

⇒ x nedojde do 0 v konečném čase.

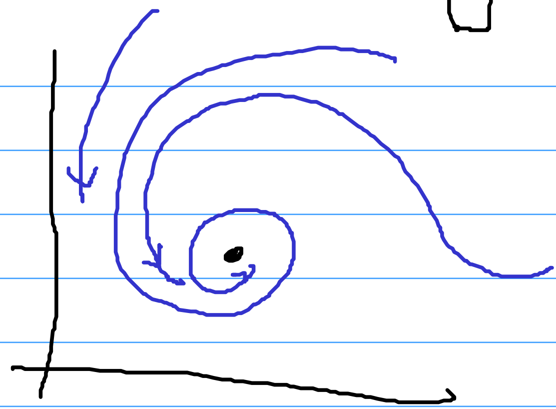
x může dojít do nuly pro $t \to +\infty$?

... nad přímkou $y = \frac{2x}{p}$ ... $y' \le -\varepsilon y$

⇒ $y(t) \le e^{-\varepsilon t} \cdot \tilde{y}_0$ ⇒ $y \to 0$

⇒ y v konečném čase narazí na zelenou parabolu ↯

pod zelenou parabolou začne x růst. □



POINCARÉ-BENDIXSONOVA VĚTA

a) stac. bod nestabilní

⇓

existuje aspoň jedno periodické řešení

b) stabilní