- F primitivní k f na I $\quad F'(x) = f(x) \; \forall x \in I$. $\quad$ • F je vždy spojitá
- 6.2. f sp. $\Rightarrow \exists$ primit. F $\quad$ • derivace nabývá mezihodnot
- $\int e^x = e^x \qquad \int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ....

$\boxed{\text{Věta L 6.5}}$ (integrace per partes)

Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I.
Nechť F je primitivní k f na I a G je primitivní k g na I.
Pak platí $\int g(x) \cdot F(x)\, dx = G(x) \cdot F(x) - \int G(x) \cdot f(x) \cdot dx$ na I

Dk: G je spojitá $\Rightarrow G(x) \cdot f(x)$ je spojitá $\overset{V6.2.}{\Longrightarrow}$ existuje její primit. fce
Mějme funkci $G \cdot F - H$, kde H je primitivní k $G \cdot f$. Pak

$$(G(x) \cdot F(x) - H(x))' = g(x) \cdot F(x) + \cancel{G(x) \cdot f(x)} - \cancel{G(x) \cdot f(x)} = g(x) \cdot F(x).$$

neboli $\int g(x) F(x)\, dx = G(x) \cdot F(x) - H(x)$ $\square$

Příklady: 1. $\underset{\substack{\| \\ F(x)}}{x} \cdot \underset{\substack{\| \\ g(x)}}{e^x} = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1\, dx \overset{c}{=} e^x \cdot x - e^x$ na $\mathbb{R}$

$F' = f = 1 \qquad G(x) = e^x$

2. $\int \log x\, dx = \int \underset{\substack{\| \\ g(x)}}{1} \cdot \underset{\substack{\| \\ F(x)}}{\log x}\, dx = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \log x - x$ na $(0, \infty)$

$G(x) = x \qquad F' = f = \frac{1}{x}$

$\boxed{\text{Věta L 6.6}}$ (první věta o substituci) $\boxed{7-2}$

Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b).

Nechť φ je funkce definovaná na (α,β) s hodnotami v intervalu (a,b), která má v každém bodě z (α,β) vlastní derivaci.

Pak $\cancel{\int f(\varphi(t))\,dt}$ $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))$ na (α,β)

<u>Dk:</u> Podle věty o derivaci složené funkce

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \quad \forall t\in(\alpha,\beta) \qquad \square$$

<u>Příklad:</u> $\int x\cdot e^{x^2}\,dx$ na $\mathbb{R}$ $\rightarrow F(y)=e^y$

$\varphi(x)=x^2 \quad f(y)=e^y \qquad e^{x^2}=f(\varphi(x)) \qquad \varphi'(x)=2x$

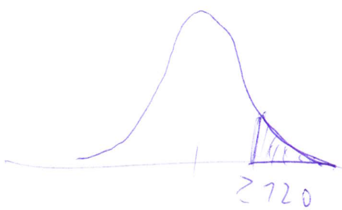
$$\int x\cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{\varphi'(x)}\cdot\underbrace{e^{x^2}}_{f(\varphi(x))}\,dx = \frac{1}{2}F(\varphi(x)) \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}e^{x^2} \text{ na } \mathbb{R}$$

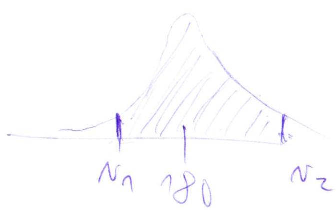
„reálný zápis"

$$\int x\cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int e^y\,dy = \frac{1}{2}e^y \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}e^{x^2} \text{ na } \mathbb{R}$$

$y=x^2 \qquad \frac{dy}{dx}=2x \Rightarrow dy = 2x\,dx$

$\int e^{-x^2}\,dx \qquad C_1\cdot e^{-\frac{(x-C_2)^2}{C_3}}$





Věta L 6.7. (druhá věta o substituci)

Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) vlastní nenulovou derivaci a $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$. Nechť funkce G je definována na intervalu (a,b) a platí

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = G(t) \quad \text{na } (\alpha, \beta)$$

Pak

$$\int f(x)\, dx = G(\varphi^{-1}(x)) \quad \text{na } (a,b).$$

Dk: Podle V 6.4. φ' nabývá mezihodnot (a je všude nenulová) $\Rightarrow$ ($\varphi' > 0$ na (α,β)) nebo ($\varphi' < 0$ na (α,β)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ φ je ryze monotonní a spojitá.

Tedy lze použít věta o derivaci inversní funkce a dostaneme

$$(\varphi^{-1}(x))' = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$$

Nyní na (a,b)

$$(G(\varphi^{-1}(x)))' = G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' =$$

$$= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x) \quad \square$$

Poznámka: Při použití druhé věty o substituci je vždy nutné ověřit, že φ je prostá a na.

Příklady: ① $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ na $(-1,1)$

$x = \sin t$ $\qquad \varphi(t) = \sin t \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (\alpha, \beta)$

$\frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t\,dt \qquad \varphi'(t) = \cos t \qquad \varphi\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1,1) = (a,b)$

$f(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \varphi^{-1}(x) = \cancel{arccos}\ \arcsin x \qquad \varphi$ prostá na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\int \sqrt{1-\varphi^2(t)} \cdot \varphi'(t)\,dt = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$

$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt \overset{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = G(t)$

Z věty $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = G(\varphi^{-1}(x)) \overset{c}{=} \frac{1}{2} \cdot \arcsin x + \frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot \arcsin x)$ na $(-1,1)$

reálně $\underset{x}{\varphi(t)} = \sin t$ prostá + na $\qquad dx = \cos t\,dt$

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \dots =$

$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \overset{c}{=} \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2 \cdot \arcsin x)$ na $(-1,1)$

② $\int f(at+b)\,dt \qquad f$ má primit. F na $\mathbb{R} \qquad a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$\varphi(t) = at+b$ prostá $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$

$y = at+b$

$\frac{dy}{dt} = a \Rightarrow dy = a \cdot dt$

$\int f(y)\,\frac{dy}{a} = \frac{1}{a} \cdot \int f(y)\,dy = \frac{1}{a}F(y) = \frac{1}{a}F(at+b)$.

$\int e^x \qquad \int e^{2x} = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \qquad \int \cos(2x+1) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x+1)$

Příklady: (3) $\int e^x \cdot \cos x$ na $\mathbb{R}$ fce je spojitá => primit. fce ex. | 7 – 5

(A) $I = \int \underset{\substack{\| \\ g(x) \\ G(x) = e^x}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\| \\ F(x) \\ f(x) = (-\sin x)}}{\cos x} = e^x \cdot \cos x + \int \underset{\substack{\| \\ \tilde{g}(x) \\ \tilde{G}(x) = e^x}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\| \\ \tilde{F}(x) \\ \tilde{f}(x) = \cos x}}{\sin x}\, dx =$

$= e^x \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - I$

$\Rightarrow 2I = e^x \cos x + e^x \sin x \overset{I \text{ „ex"}}{\Longrightarrow} \int e^x \cos x = \dfrac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2}$

(B) $\int e^x \cdot \cos x = \int \mathrm{Re}(e^x \cdot e^{ix}) = \mathrm{Re}\left(\int e^{x\cdot(1+i)}\right) =$

$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+i} \cdot e^{x\cdot(1+i)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-i}{1+1} \cdot (e^x \cdot \cos x + e^x \cdot i \cdot \sin x)\right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot e^x \cos x + \left(-\frac{i}{2}\right) \cdot e^x \cdot i \cdot \sin x = \frac{1}{2} e^x \cdot \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x$

(4) $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$ na $\mathbb{R}$ spoj. fce => I_n existuje na $\mathbb{R}$

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx$

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

$$= \int \underbrace{1}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^n}}_{F(x)}\,dx = x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x \cdot (-n) \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \cdot 2x =$$

$$G(x) = x \qquad f = (-n) \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \cdot 2x$$

$$= x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} + 2n \cdot \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx =$$

$$= x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} + 2n \cdot \left(\int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx \right) =$$

$$= x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} + 2n \cdot \left(I_n - I_{n+1} \right)$$

$$\Longrightarrow I_{n+1} = \frac{x}{2n \cdot (1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{c}{=} \arctan x$$

$$I_2 \overset{c}{=} \frac{x}{2 \cdot (1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$