

2. cvičení z PSt — 9.3.2021

Podmíněná pravděpodobnost

1. Jaký je vztah tvrzení $P(A | B) > P(A)$ a $P(B | A) > P(B)$?
2. Pro plánování výletu do Krkonoš používáme českou a polskou předpověď počasí. Předpokládejme, že každá z nich má tutéž pravděpodobnost úspěchu $p \in [0, 1]$, obě předpovědi jsou nezávislé. Používáme je takto: pokud se shodují, věříme jim, pokud ne, rozhodneme se náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že se rozhodneme správně?
3. (Paradox Monty Halla) V soutěžní hře soutěžící (tj. my) stojíme na podiu před třemi dveřmi. Za jedním je auto (to chceme), za ostatními koza (tu nechceme, moc žere). Vybereme si jednu dveř, ale než je otevřeme, tak moderátor otevře jednu ze zbylých dveří, ukáže za nimi kozu, a nabídne nám, že můžeme svoji volbu změnit. Máme to udělat? Pomůže to? Uvědomte si, že zadání má (minimálně) následující dvě varianty:
 - (a) moderátor ví, kde je auto, a tomu přizpůsobí, které dveře otevře
 - (b) moderátor si hodí korunou, které dveře otevřít. Kdyby odhalil auto, tak bychom asi prohráli, ale to se zrovna nestalo.

Budeme používat strategii, kdy dveře změním. Spočítejte pravděpodobnost, že vyhraje auto, ve variantách (a), (b).

Nezávislé jevy

4. Pokud jsou jevy A, B nezávislé, tak jsou nezávislé i jevy A, B^c . A také jevy A^c, B^c .
5. Mohou být dva jevy nezávislé a zároveň disjunktní?
6. Najděte jevy A, B, C takové, že $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, ale jevy nejsou po dvou nezávislé.

Bayesova věta

7. Petr dostává hodně emailů, ale 80 % z nich jsou spamy. Jeho spamový filtr 90 % spamů správně označí, ale také 5 % řádných emailů označí jako spam.
 - (a) Kolik procent emailů bude označeno jako spamy?
 - (b) Kolik procent řádných emailů je mezi těmi, co jsou označeny jako spamy?
 - (c) Kolik procent spamů je mezi emaily, které testem prošly?
8. Kouřovými signály přenášíme binární soubor. Je proto poměrně vysoká pravděpodobnost chyby u každého bitu: 0 se jako 0 přenese jen s pravděpodobností 0.9, 1 jako 1 jen s pravděpodobností 0.8. Předpokládejme (trochu neseriózně), že jednotlivé znaky se přenášejí nezávisle.
 - (a) Pokud jsme dostali signál 0, jaká je pravděpodobnost, že byl opravdu vyslán?
 - (b) Dostali jsme zprávu 0010. Jaká je pravděpodobnost, že byla opravdu vyslána?
 - (c) Jak se výpočet změní, pokud budeme pro kontrolu vysílat každý symbol třikrát (a pak vezmeme častější z těch tří pokusů)?
9. Pokud vidíme bílého pudla, zvyšuje to naši důvěru, že je každá vrána černá?

Hrátky s náhodnými veličinami

10. Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu $1/10$, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.
 - (a) Jaká je $P(X > k)$?
 - (b) Jaká je distribuce X ? Tj. určete pravděpodobnostní funkci p_X , tj. pro každé x určete $P(X = x)$.
 - (c) Jaká je $P(X \geq 10 | X \geq 5)$?

(d) Jaká je $\mathbb{E}(X)$?

11. Pokračování z minulé úlohy: označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y .

12. Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p , že se trefí. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z .

Bonusy

13. (Simpsonův paradox) V této úloze budeme mít bonbony dvou druhů: dobré červené a nedobré zelené. Bonbony ale vybíráme z nádoby poslepu (nebo jsme barvoslepi). Rozhodněte, zda se může stát následující podivnost:

- Při vytahování bonbonu z bílé krabice máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černé krabice.
- Při vytahování bonbonu z bílého sáčku máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černého sáčku.
- Pokud přesypeme bonbony z bílého sáčku do bílé krabice (a z černého do černé krabice), tak budeme mít lepší pravděpodobnost vytažení dobrého bonbonu v černé krabici.

14. (Prosecutor's fallacy) Paní C umřely dvě děti krátce po narození. Je obžalovaná za dvojnásobnou vraždu. Žalobce argumentuje takto: Pravděpodobnost syndromu náhlého úmrtí kojenců je $1/8500$. Takže pravděpodobnost dvou takových jevů je $1/8500^2$. Tudíž pravděpodobnost, že paní C je nevinná je $1/8500^2$, což je hodně málo.

Formulujte argumenty žalobce v řeči pravděpodobnosti a nalezněte v nich dvě chyby.

K procvičení

15. Logická formule $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní obměně $\neg B \Rightarrow \neg A$. Budeme se zabývat analogiemi zahrnujícími pravděpodobnost.

- Ukažte, že pokud $P(B | A) = 1$, tak také $P(A^c | B^c) = 1$.
- Ukažte, že je však možné, aby $P(B | A) \doteq 1$, ale $P(A^c | B^c) \doteq 0$.

16. V truhle je sto mincí. Z nich 99 je normálních, ale jedna má na obou stranách orla. Vytáhneme náhodnou minci a šestkrát s ní hodíme, pokaždé padne orel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme si vytáhli „dvouorlovou“ minci? (Zkuste napřed odhadnout, pak spočítat.)

17. Na chorobu C máme dva testy, A a B . Test A má sensitivitu i specificitu $p = 0.95$. Test B vždy řekne, že pacient je zdravý. Předpokládejte, že $P(C) = 0.01$.

(a) Spočítejte pro oba testy pravděpodobnost úspěchu (tj. správné odpovědi), použijeme-li je na náhodného pacienta. Rozmyslete si, co to říká o užitečnosti obou testů.

(b) Pro jaké p je pravděpodobnost úspěchu obou testů stejná?

18. Ve volbách hlasují lidé pro dva kandidáty, A a B . Při odchodu z volební místnosti jsou voliči náhodně požádáni o účast v exit-poll. Předpokládejme, že kdo odpoví, odpoví popravdě koho volil, ale ne všichni se zúčastní. Označíme-li E množinu voličů, kteří se exit-pollu zúčastní, tak předpokládejme $P(E | A) = 0.7$ a $P(E | A^c) = 0.4$. Výsledky exit-pollu jsou 60 % pro A . Jaký je skutečný podíl lidí, kteří hlasovali pro A ?

19. Máme tři normální hrací kostky a jednu kostku, kde jsou tři jedničky a tři dvojky. Vybereme uniformně náhodně jednu z kostek, hodíme a padne jednička. Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali normální kostku?