1.3 Dvě kuličky nesoucí náboj q1 a q2 se ve vzdálenosti r přitahují silou o velikosti F1. Po doteku se v téže vzdálenosti odpuzují silou F2. Určete náboje q1, q2. (pro určitost uvažujte q1>0)

$q_1 > 0$; $q_2 < 0$;

$$F_2 = k \cdot \frac{q^2}{r^2} \Rightarrow |q| = \sqrt{\frac{F_2 r^2}{k}} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

1) $|q_1| > |q_2|$

$$|q| = (\cancel{|q_1|} - |q_2|)/2 = (q_1 + q_2)/2 \Rightarrow q_2 = 2|q| - q_1 = 2q - q_1$$

$|q| = q$

$$\frac{r^2 F_1}{k} = -q_1 q_2 = -q_1(2q - q_1) \qquad q = |q| = \sqrt{\frac{F_2 r^2}{k}}$$

$\Downarrow$

$$0 = q_1^2 - 2q_1\sqrt{\frac{r^2 F_2}{k}} - \frac{r^2 F_1}{k}$$

bereme řešení $q_1 > 0$

$$q_1 = \sqrt{\frac{r^2}{k}}\left(\sqrt{F_2} + \sqrt{F_2 + F_1}\right)$$

$$q_2 = 2|q| - q_1 = \sqrt{\frac{r^2}{k}}\left(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_2 + F_1}\right)$$

2) $|q_1| < |q_2|$ $\quad q < 0$

$$|q| = (|q_2| - |q_1|)/2 \Rightarrow \overset{|q_2|}{-q_2} = q_1 + 2|q|$$

$$F_1 = -k\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{k}{r^2} q_1 (q_1 + 2|q|)$$

$\Rightarrow$ kv. rovnice pro q_1

$$q_1^2 + 2|q|\, q_1 - \frac{r^2 F_1}{k} \qquad |q| = \sqrt{\frac{F_2 r^2}{k}}$$

jen $q_1 > 0$

q_1

$$q_1 = +\sqrt{\frac{r^2}{k}}\left(-\sqrt{F_2} + \sqrt{F_1 + F_2}\right)$$

$$q_2 = -q_1 - 2|q| = -\sqrt{\frac{r^2}{k}}\left(\sqrt{F_2} + \sqrt{F_1 + F_2}\right)$$

$$q_1 = \sqrt{\frac{r^2}{k}}\left(\sqrt{F_1 + F_2} \pm \sqrt{F_2}\right) \qquad q_2 = -\sqrt{\frac{r^2}{k}}\left(\sqrt{F_1 + F_2} \mp \sqrt{F_2}\right)$$

VEKTOROVÁ ALGEBRA

A, B, C – VEKTORY $\qquad A = (a_1, a_2, a_3)$ atd.

f, g – skaláry

– Sumační notace

$$A.B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i$$

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$A.B = B.A \qquad A \times B = - B \times A$$

$$f(A.B) = (fA).B = A.(fB) \qquad f(A \times B) = (fA) \times B = A \times (fB)$$

$$A(B \cdot C) \neq (A \cdot B)C \qquad A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \qquad A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$A.B = 0 \qquad A \perp B$$

$$A \times B = 0 \qquad A \parallel B$$

$$A.A = |A|^2 \qquad A \times A = 0$$

$$A \times (B \times C) = B(A.C) - C(A.B) \qquad \text{BÁC} - \text{CÁB}$$

$$A.(B \times C) = C.(A \times B) = B.(C \times A)$$

$$(A \times B).(C \times D) = (A.C)(B.D) - (B.C)(A.D)$$

$$(A \times B)^2 = |A|^2 |B|^2 - (A.B)^2$$

VEKTOROVÝ SOUČIN POMOCÍ LEVI-CIVITOVA TENZORU

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i,j,k \text{ – sudá permutace čísel } 1,2,3 \ (123 - 312 - 231) \\ 0 & \text{alespoň dva indexy stejné} \\ -1 & ijk \text{ – liché permutace } 321 - 132 - 213 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji}$$

$$(A \times B)_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \quad \text{– i-tá složka součinu}$$

$A = \vec{A}$

$B = \vec{B}$

$C = \vec{C}$

Derivace polí – gradient

$$f(\vec{r}) \qquad \vec{r} = (x, y, z) \qquad d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

$$\underbrace{f(\vec{r} + d\vec{r})}_{\text{posun o } d\vec{r}} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz}_{} + f(\vec{r})$$

$$df(\vec{r}) = f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r}) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)}_{\substack{\text{vektor} \\ \parallel \\ \text{gradient } f \\ \text{grad } f}} \cdot d\vec{r}$$

zavedeme operátor

$$\underbrace{\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\text{nabla}}$$

$$\text{grad } f = \nabla f$$

$$df(\vec{r}) = \nabla f \cdot d\vec{r}$$

Derivace ve směru $\vec{v}$ (jedn. vektor) $\qquad \dfrac{d f(\vec{r})}{d \vec{v}} = \nabla f \cdot \vec{v}$

Další s ∇ $\qquad A_x(\vec{r})\quad A_y(\vec{r})\quad A_z(\vec{r})$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

divergence $\qquad \nabla\cdot\vec{A} = \mathrm{div}\,\vec{A}$

$$\nabla\cdot\vec{A} \neq \vec{A}\cdot\nabla$$

skalární pole — operator

$$\vec{A}\cdot\nabla = A_x\frac{\partial}{\partial x} + \dots$$

$$\nabla f \neq f\nabla$$

a $\quad \nabla\times\vec{A}$

↓

vektor

$$(\nabla\times\vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$(\quad)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$(\quad)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

oper

↓

$\nabla\times\vec{A} \neq \vec{A}\times\nabla$

vekt. pole

rotace $\qquad \mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla\times\vec{A}$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \dots$$

OPERÁTORY - 1

Hamiltonův operátor $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$

A, B, C - VEKTOROVÁ POLE

f, g - skalární funkce

$\nabla . A = \operatorname{div} A$

$\nabla \times A = \operatorname{rot} A$

$\nabla f = \operatorname{grad} f$

Pozor ! $\nabla f \neq f \nabla \Rightarrow$ OPERÁTOR $\Rightarrow \left(f\frac{\partial}{\partial x_1}, f\frac{\partial}{\partial x_2}, f\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$

VEKTOR $\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$

$\nabla . A \neq A . \nabla \longrightarrow a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial}{\partial x_3}$ = operátor

$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ = skalár

---

TENZOR IDENTITY $\overleftrightarrow{I}$

$\overleftrightarrow{I} . A = A$

$\nabla \vec{r} = \overleftrightarrow{I}$

$A \cdot \operatorname{grad} \vec{r} = A . \nabla \vec{r}$

k-tá složka

$A . \nabla \vec{r}\,\big|_k = (A . \nabla)\, \vec{r}\,\big|_k = \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) x_k =$

$= a_j \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = a_j \delta_{kj} = a_k$

$\Downarrow$

$\underline{\underline{A . \nabla \vec{r} = A}}$

$\operatorname{grad} \vec{r} = \overleftrightarrow{I}$

$\operatorname{div} \vec{r} = n$ - dimenze

$\operatorname{rot} \vec{r} = \emptyset$

OPERÁTORY 2

2. derivace   Laplace

$\nabla\times\nabla = \emptyset$ $\nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \Delta$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

$$\Delta\vec{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$$

div grad $f = \nabla\cdot(\nabla f) = (\nabla\cdot\nabla)f = \Delta f$

rot grad $f = \nabla\times(\nabla f) = (\nabla\times\nabla)f = \emptyset$

div rot $A = \nabla\cdot(\nabla\times A) = A\cdot(\nabla\times\nabla) = \emptyset$

div grad $A = (\nabla\cdot\nabla)A = \Delta A$ - vekt. pole

rot rot $A = \nabla\times(\nabla\times A) = \nabla(\nabla\cdot A) - (\nabla\cdot\nabla)A = \nabla(\nabla\cdot A) - \Delta A$

$\Rightarrow \Delta A =$ grad div A − rot rot A

IDENTITY

konstanta z hlediska derivace

grad $(fg) = \nabla(fg) = \nabla(f_c g) + \nabla(f g_c) = f\nabla g + g\nabla f$

$\nabla k f = k\nabla f$

grad $(f(g(\vec r))) = \frac{df}{dg}$ grad g

Pozor! $(\nabla f)\times(\nabla g) \neq \emptyset$ jen pro $f = g$.

grad $(A\cdot B) = \nabla(A\cdot B) = \nabla(A_c\cdot B) + \nabla(A\cdot B_c)$

ale lze ukázat že

$A\times(\nabla\times B) = \nabla(A_c\cdot B) - (A\cdot\nabla)B \Rightarrow \nabla(A_c\cdot B) = A\times(\nabla\times B) + (A\cdot\nabla)B$

a   podobně $\nabla(B_c\cdot A) = B\times(\nabla\times A) + (B\cdot\nabla)A$

Po dosazení pak

grad $(A\cdot B) = (A\cdot\nabla)B + (B\cdot\nabla)A + A\times$ rot $B + B\times$ rot A

$A\times$ rot $A = A\times(\nabla\times A) = \nabla(A_c\cdot A) - (A\cdot\nabla)A$

$\nabla(A\cdot A) = \nabla(A_c\cdot A) + \nabla(A\cdot A_c) \Rightarrow \nabla(A_c\cdot A) = \frac{1}{2}\nabla(A\cdot A)$

Po dosazení

$A\times$ rot $A = \frac{1}{2}$ grad $(A\cdot A) - (A\cdot\nabla)A$

OPERÁTORY 3

$\nabla f\cdot\vec{A}_c = \vec{A}\cdot\nabla f$

div $(fA) = \nabla\cdot(fA) = \nabla\cdot(f_c A) + \nabla\cdot(f A_c) =$
$= f\,\nabla\cdot A + \nabla f\cdot A_c = f$ div $A + A\cdot$ grad f

div $(A\times B) = \nabla\cdot(A\times B) = \nabla\cdot(A_c\times B) + \nabla\cdot(A\times B_c) =$
$= -A\cdot(\nabla\times B) + B\cdot(\nabla\times A) = B\cdot$ rot $A - A\cdot$ rot B

rot $(fA) = \nabla\times(fA) = \nabla\times(f_c A) + \nabla\times(f A_c) =$
$= f(\nabla\times A) + \nabla f\times A_c = f(\nabla\times A) - A\times\nabla f =$
$= f$ rot $A - A\times$ grad f

rot $(A\times B) = \nabla\times(A\times B) = \nabla\times(A_c\times B) + \nabla\times(A\times B_c)$
$\overset{\text{BAC-CAB}}{=} A(\nabla\cdot B) - (A\cdot\nabla)B + (B\cdot\nabla)A - B(\nabla\cdot A)$
$= (B\cdot\nabla)A - (A\cdot\nabla)B + A$ div $B - B$ div A

2. Určete divergenci a rotaci následujících vektorových polí: a) $\vec{F} \equiv (x+y,\ -x+y,\ -2z)$; b) $\vec{F} \equiv (2y,\ 2x+3z,\ 3y)$; c) $\vec{F} \equiv (x^2-z^2,\ 2,\ 2xz)$. Je-li rot $\vec{F} = 0$, najděte skalární pole takové, aby $\vec{F} = \operatorname{grad} \varphi$.

[0,(0,0,-2); 0,(0,0,0),2xy + 3zy; 4x,(0,-4z,0)].

a) $\operatorname{div} \vec{F}$ $\qquad \vec{F} = (x+y,\ -x+y,\ -2z)$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial(-x+y)}{\partial y} + \frac{\partial(-2z)}{\partial z} = 1+1-2 = 0$$

b) $\Rightarrow$ $\operatorname{div} \vec{F} = 0$

c) $\operatorname{div} \vec{F} = 2x + 0 + 2x = 4x$

2. Určete divergenci a rotaci následujících vektorových polí: a) $\vec{F} \equiv (x+y, \ -x+y, \ -2z)$; b) $\vec{F} \equiv (2y, \ 2x+3z, \ 3y)$; c) $\vec{F} \equiv (x^2-z^2, \ 2, \ 2xz)$. Je-li rot $\vec{F} = 0$, najděte skalární pole takové, aby $\vec{F}$ = grad φ.
[0,(0,0,-2); 0,(0,0,0),$2xy+3zy$; $4x$,(0,$-4z$,0)].

$\vec{A} \times \vec{B} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, \ a_3 b_1 - a_1 b_3, \ a_1 b_2 - a_2 b_1)$

a) $\text{rot}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$

$$\text{rot}\,\vec{F}\Big|_x = \frac{\partial(-2z)}{\partial y} - \frac{\partial(x+y)}{\partial z} = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{F}\Big|_y = \frac{\partial(x+y)}{\partial z} - \frac{\partial(-2z)}{\partial x} = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{F}\Big|_z = \frac{\partial(-x+y)}{\partial x} - \frac{\partial(x+y)}{\partial y} = -2$$

$$\text{rot}\,\vec{F} = (0,0,2)$$

Určete gradient následujících skalárních polí ($\vec{r}$ je rádiusvektor): a) r ✓ b) r^2, c) r^3, d) $\frac{1}{r}$ ✓ e) $\frac{1}{r^2}$, f) $\frac{1}{r^3}$, g) $\vec{c}\cdot\vec{r}$, h) $\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r}$, i) $\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^2}$, j) $\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3}$. ✓

DÚ DÚ DÚ

[$\frac{\vec{r}}{r}$, $2\vec{r}$, $3r\vec{r}$, $\frac{-\vec{r}}{r^3}$, $\frac{-2\vec{r}}{r^4}$, $\frac{-3\vec{r}}{r^5}$, $\vec{c}$, $\frac{r^2\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^3}$, $\frac{r^2\vec{c}-2(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^4}$, $\frac{r^2\vec{c}-3(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}$; zde i v následujících příkladech řešení s podmínkou $r \neq 0$, pokud výrazy při $r \to 0$ neomezeně rostou.]

$\vec{r} \to (x,y,z)$

$\vec{r} = (x,y,z)$

$\vec{c}$ - konstantní vektor

$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \qquad |\vec{r}| = r$$

$$\boxed{\nabla r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{1}{r}\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r}}$$

$$\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{}} = \frac{x}{r}$$

analogicky pro

$$\nabla\frac{1}{r^m} = \nabla r^{-m} = \left(-\frac{mx}{r^{m+2}}, -\frac{my}{r^{m+2}}, -\frac{mz}{r^{m+2}}\right) = -\frac{m\vec{r}}{r^{m+2}}$$

$m = 1$ $\quad$ Q v počátku

$$\approx -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{m}{2}}\right] = 2x \cdot -\frac{m}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{m}{2}-1} = -mx\,r^{-m-2} = -\frac{mx}{r^{m+2}}$$

$\vec{c}$ - konstantní vektor

$$\nabla(\vec{c}\cdot\vec{r}) = \nabla(c_x x + c_y y + c_z z) = \vec{c}$$

$\nabla\vec{r} = \overleftrightarrow{I}$ $\quad \vec{c}\cdot\overleftrightarrow{I} = \vec{c}$

$$\nabla(\vec{r}\cdot\vec{c}) = \nabla\vec{r}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\nabla\vec{r} = \vec{c}$$

$$\nabla\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3} = \left(-3\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^5}x + \frac{c_x}{r^3}, -3\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^5}y + \frac{c_y}{r^3}, -3\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^5}z + \frac{c_z}{r^3}\right)$$

$$= \frac{1}{r^3}(c_x, c_y, c_z) - 3\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^5}(x, y, z) =$$

$$= \frac{\vec{c}}{r^3} - 3\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r}$$

$$\text{x-ová} = \frac{\partial \frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\overset{f}{(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}}\;\overset{g}{(c_x x + c_y y + c_z z)}\right)$$

$$= (c_x x + c_y y + c_z z)\,\left(-\tfrac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\,2x +$$

$$+ (x^2 \dots)^{-3/2}\cdot c_x = \vec{c}\cdot\vec{r}\,(-3)\,x\, r^{-5} + r^{-3} c_x$$

$$= -3\frac{x\,\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^5} + \frac{c_x}{r^3}$$

Určete divergenci a rotaci následujících vektorových polí:

a) $\vec{r}$, b) $\dfrac{\vec{r}}{r}$, c) $\dfrac{\vec{r}}{r^2}$, d) $\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, e) $\dfrac{\vec{c}}{r}$. DÚ

[$3, \vec{0}$; $\dfrac{2}{r}, \vec{0}$; $\dfrac{1}{r^2}, \vec{0}$; $0, \vec{0}$; $-\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3}$, $\dfrac{\vec{c}\times\vec{r}}{r^3}$. Všimněme si zejména příkladu d), který odpovídá Coulombově poli bodového náboje, umístěného v počátku souřadnic. Toto pole má všude kromě počátku div $\vec{F} = 0$ v souladu s Poissonovou rovnicí. Naproti tomu lze dokázat i opačně, že jediné pole, které vyhoví této podmínce je právě pole Coulombovo. Rozložíme-li totiž obecné pole $\vec{F}$ do mocninné řady se zápornými exponenty (pole neomezeně roste při $r \neq 0$) a najdeme divergenci obecného členu této řady:

$$\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^\alpha} = \frac{\operatorname{div}\vec{r}}{r^\alpha} + \vec{r}\cdot \operatorname{grad}\frac{1}{r^\alpha} = \frac{3-\alpha}{r^\alpha} = 0$$

, zjistíme, že jediný nenulový člen této řady odpovídá $\alpha = 3$, tedy právě Coulombově poli.]

1.1.9. Poměr velikostí dvoubodových nábojů opačných znamének je n, vzdálenost obou nábojů je d. Dokažte, že povrch nulového potenciálu je kulová plocha. Vypočítejte poloměr R této plochy a vzdálenost jejího středu od jednoho z nábojů.