Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ K Dirichletovo kritérium

$a_n = \sin n$ má omezené částečné součty

$b_n = \frac{1}{n} \searrow 0$

Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1-\cos 2n}{2}}{n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}}_{=+\infty} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}}_{K}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ $\quad a_n = \cos 2n$ má omezené částečné součty

$b_n = \frac{1}{n} \searrow 0$

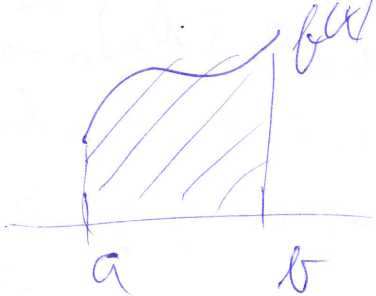
Podle Dirichletova kritéria $\sum \frac{\cos 2n}{n}$ K

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n} \geq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}}_{+\infty} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}}_{\in \mathbb{R}} = +\infty$$

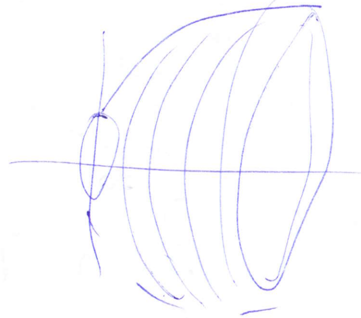
Diverguje.

6. Primitivní funkce

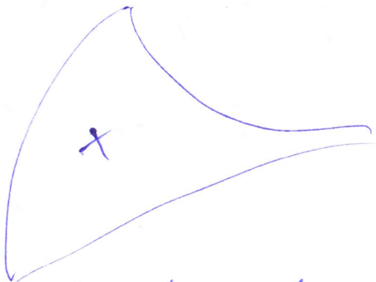
motivace: Obsah $= \int_a^b f(x)\,dx$



Objem, obsah povrchu



těžiště



6.1. Základní vlastnosti

Def: Nechť je funkce f definovaná na otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je primitivní ~~fce~~ funkce k funkci f, pokud pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a $F'(x) = f(x)$. Množinu všech primitivních funkcí k f na I značíme $\int f(x)\,dx$.

Př: $(x^2)' = 2x$, tedy $\int 2x\,dx = x^2$ na $\mathbb{R}$.

$(x^2+1)' = 2x$ $\qquad \int 2x\,dx = x^2+1$

Věta L 6.1 (o jednoznačnosti ~~primitivní~~ primitivní funkce až na konstantu)

Nechť F a G jsou primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I. Pak ~~existuje~~ existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že

$F(x) = G(x) + c$ pro všechna $x \in I$.

__Dk:__ Označme $H(x) = F(x) - G(x)$. Pak

$$(H(x))' = (F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I \implies \exists c \in \mathbb{R} \quad H(x) = c \text{ na } I$$

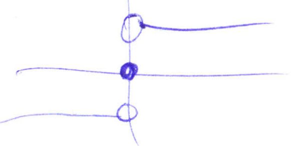
(Lagrangeova věta) $\square$

__Poznámky:__ 1. Značíme $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$, nebo $\int x\,dx \stackrel{c}{=} \frac{x^2}{2}$.

2. Nechť F je primitivní k f. Pak F je spojitá (protože má všude vlastní derivaci).

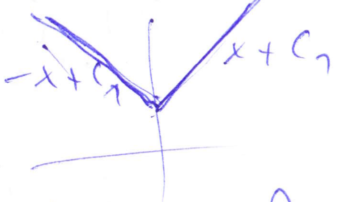
3. $\operatorname{sgn} x$ nemá na $\mathbb{R}$ primitivní funkci.

$f(x)$



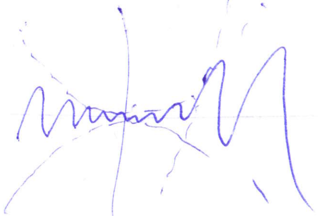
na $(0,\infty)$ $f(x) = 1 \implies F(x) = x + C_1$

na $(-\infty, 0)$ $f(x) = -1 \implies F(x) = -x + C_2$



& F je spojitá v $0 \implies C_1 = C_2$ ale F není derivace v 0. ↯

4. Funkce $F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ je diferencovatelná na $\mathbb{R}$, ale její derivace není spojitá na $\mathbb{R}$.



$F'(x) = \underbrace{2x \cdot \sin(\tfrac{1}{x})}_{\to 0} + x^2 \cdot \cos(\tfrac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x^2}$ $\qquad F'(0) = 0$

Věta T 6.2 (o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce) 6-4.

Nechť I je otevřený interval a f je spojitá funkce na I.

Pak f má na I primitivní funkci.

Dk později:

Pozn: $\int e^{-x^2}dx$ ~~...~~ existuje.

Tato primitivní funkce nejde zapsat vzorečkem z elementárních funkcí.

Věta L 6.3 (linearita primitivní funkce)

Nechť f má primitivní funkci F a g má primitivní funkci G na otevřeném intervalu I a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pak $\alpha \cdot f + \beta g$ má primitivní funkci $\alpha F + \beta G$.

Důkaz: $(\alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x))' =$

Víme $(F(x))' = f(x)$ a $(G(x))' = g(x)$ na I.

Tedy $\forall x \in I$ $(\alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x))' = \alpha \cdot F'(x) + \beta \cdot G'(x) =$

$= \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$. $\square$

Tabulkové integrály:

$\int x^n \, dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ na $\mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ pro $n \in \mathbb{Z}$ \ {-1}

$\int \frac{1}{x} \, dx \overset{c}{=} \log|x|$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$

$\int e^x \, dx \overset{c}{=} e^x$ pro $x \in \mathbb{R}$

$\int \sin x \, dx \overset{c}{=} -\cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$

$\int \cos x \, dx \overset{c}{=} \sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx \overset{c}{=} \tan x$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\int \frac{-1}{\sin^2 x} \, dx \overset{c}{=} \cot g\, x$ pro $x \in (0, \pi) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx \overset{c}{=} \arctan x$ na $\mathbb{R}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x$ pro $x \in (-1, 1)$

$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \overset{c}{=} \arccos x$ pro $x \in (-1, 1)$

Věta T 6.9 (nutná podmínka existence ~~primitivní~~ primitivní funkce)

Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní ~~fun~~ funkci. Pak f má na I Darbouxovu vlastnost, tedy pro každý interval $J \subset I$ je $f(J)$ interval.

Důsledek: $\operatorname{sgn} x$ nemá na $\mathbb{R}$ primit. funkci

Dk: Nechť $J \subset I$ je interval. Nechť $y_1, y_2 \in f(J)$ a $y_1 < z < y_2$.
Chceme ukázat, že $z \in f(J)$.

Nechť F je primitivní funkce k f na I. Definujme

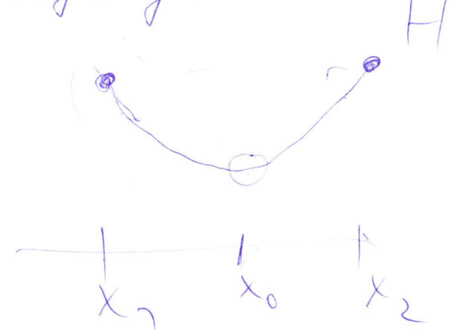
$$H(x) = F(x) - z \cdot x \qquad \text{pro } x \in I.$$

Pak H je spojitá na I a $\forall x \in I$ $\quad (H(x))' = F'(x) - z = f(x) - z$.

Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ tak, že $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$

Nechť $x_1 < x_2$ (v opačném případě je důkaz analogický).

Funkce H je spojitá na $[x_1, x_2]$, a tedy tam nabývá minima.



Víme $H'(x_1) = f(x_1) - z < f(x_1) - y_1 = 0$

Tedy $\exists\, \delta > 0$, že $\forall x \in [x_1, x_1 + \delta)$: $H(x) < H(x_1)$, tedy v x_1 není minimum.

Analogicky $H'(x_2) = f(x_2) - z > f(x_2) - y_2 = 0$, tedy v x_2 není minimum

Tedy minimum je v $x_0 \in (x_1, x_2)$ $\xRightarrow{\text{Fermatova věta}}$ $0 = H'(x_0) = f(x_0) - z$
$\Rightarrow f(x_0) = z$ $\blacksquare$