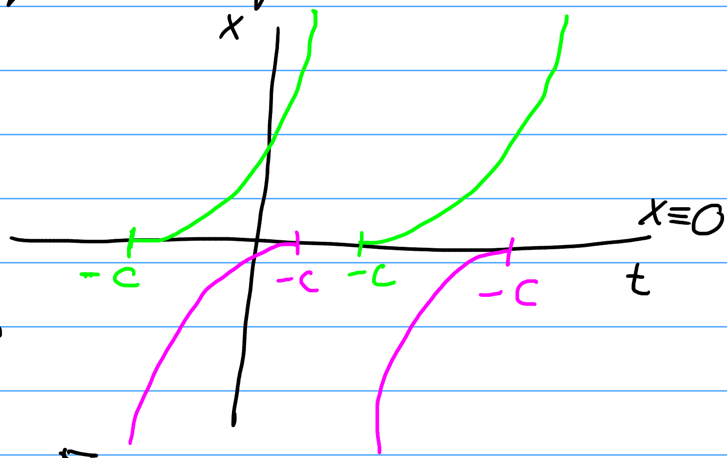
2. CVIČENÍ – NAPOJOVÁNÍ ŘEŠENÍ

+ otázka jednoznačnosti

Př. 1 $\quad x' = \sqrt[3]{x^2}$ ... separované proměnné



$x \equiv 0$ stacionární řešení

$x > 0$

$x < 0$

$x > 0$ .... $x(t) = \left[\frac{1}{3}(t+c)\right]^3$

$t \in (-c, +\infty)$

$x < 0$ ... $x(t) = \left[\frac{1}{3}(t+c)\right]^3$

$t \in (-\infty, -c)$

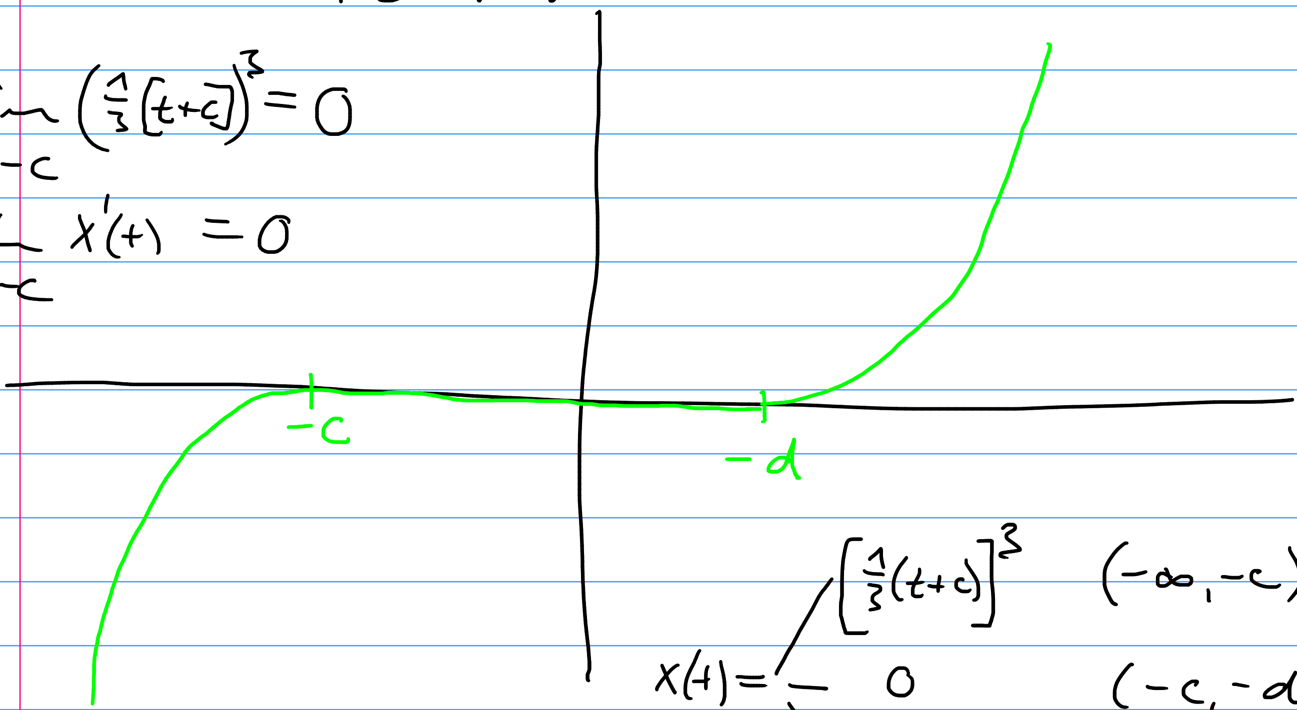
Jsou tato řešení maximální? Nebo je možné je prodloužit

⟶ řešení lze pospojovat,

MAXIMÁLNÍ ŘEŠENÍ:

$$\lim_{t \to -c} \left(\frac{1}{3}(t+c)\right)^3 = 0$$

$$\lim_{t \to -c} x'(t) = 0$$



$$x(t) = \begin{cases} \left[\frac{1}{3}(t+c)\right]^3 & (-\infty, -c) \\ 0 & (-c, -d) \\ \left[\frac{1}{3}(t+d)\right]^3 & (-d, +\infty) \end{cases}$$

Př (1) $tx' - x = t^3 e^t$ $\quad /:t \quad (t \neq 0$

$\rightsquigarrow$ 2 intervaly $t>0$, $t<0$

$\to$ (2) $x' - \frac{x}{t} = t^2 e^t$

lineární rovnice $p(t) = \frac{1}{t}$, $q(t) = t^2 e^t$

... vyřešíme $\quad x(t) = t(t-1)e^t + ct \quad t>0$, $t<0$

To jsou maximální řešení rovnice (2), která v 0 nemá smysl (pro $t=0$)

Ale rovnice (1) má smysl pro $t=0$ ... ?

Je vidět že $x(t) = t(t-1)e^t + ct$, $t \in \mathbb{R}$

je řešení rce (1)

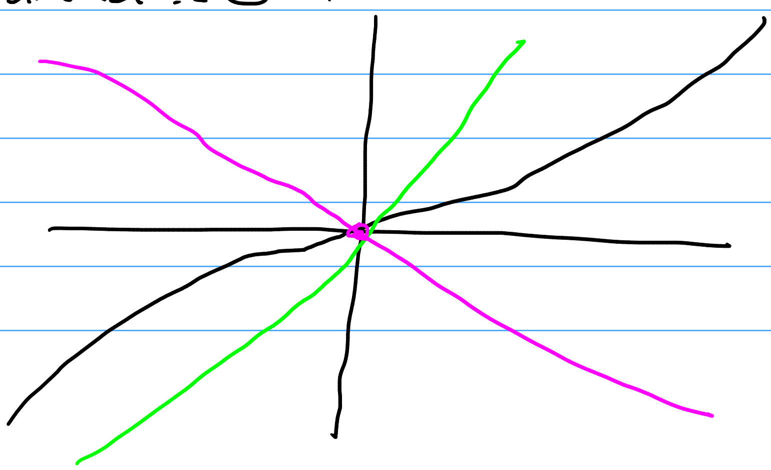
pro $t=0$ ověříme: $x'(t) = (t-1)e^t + te^t + t(t-1)e^t + c$

$x'(0) = c-1$

LS: $tx'(t) - x(t)\big|_{t=0} = 0\cdot(c-1) - 0 = \underline{\underline{0}}$

PS: $t^2 e^t \big|_{t=0} = \underline{\underline{0}}$ $\quad$ rovnice splněna pro $t=0$.

POZORUJEME: $\forall c \in \mathbb{R}$ $\quad x(t)=0$ ... všechna řešení prochází bodem $(0,0)$ ... ale každé tam má jinou derivaci .. $c-1$

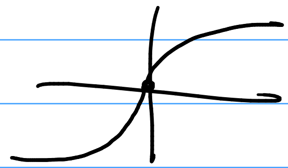


Proč nemáme jednoznačnost?

$x' = f(t, x)$ (DR)

- pokud f má spojité parciální derivace podle x, pak máme jednoznačnost

Př 1: f nemá spojité parciální derivace podle x ... $f = \sqrt[3]{x^2}$ má v 0 der. $+\infty$



Př 2: rce $tx' - x = t^3 e^t$ nemá tvar (DR)

kvůli tomuto t