2. CVIČENÍ – LINEÁRNÍ ROVNICE

$x' + p(t)\cdot x = q(t)$, kde p, q jsou dané funkce

Př. $x' + \cos t \cdot x = (1+t)e^{-\sin t}$

1. VARIACE KONSTANT

1. krok ... vyřešíme tzv. homogenní rovnici (položíme pravou stranu rovnou 0)

$$x' + \cos t \cdot x = 0$$

$$x' = -\cos t \cdot x \quad \rightsquigarrow \text{ separované proměnné}$$

$x \equiv 0$ je stacionární řešení

pro $x \neq 0$ vydělíme x

$$\frac{x'}{x} = -\cos t \quad / \int$$

$\int \cos t = \sin t$

$$\ln|x| = -\sin t + c \qquad e^c > 0$$

$$|x| = e^{-\sin t + c} = e^c e^{-\sin t} = K e^{-\sin t}$$

$x > 0$: $x = K\cdot e^{-\sin t}$, $K > 0$

$x = 0$: $x = 0\cdot e^{-\sin t}$

$x < 0$: $x = -Ke^{-\sin t} = \tilde{K}e^{-\sin t}$, $\tilde{K} < 0$

$$x(t) = K\cdot e^{-\sin t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad K \in \mathbb{R} \quad \text{... nekonečně mnoho řeš.}$$

2. krok ... variace konstant

najdeme tzv. partikulární řešení původní nehomogenní rovnice

hledáme ho ve tvaru

$x_p(t) = K(t)\cdot e^{-\sin t}$ ... dosadíme do rovnice

$$x_p'(t) = K'(t)e^{-\sin t} + K(t)e^{-\sin t}\cdot(-\cos t)$$

$$x_p'(t) + \cos t\, x_p(t) = (1+t)e^{-\sin t}$$

$$K'(t)e^{-\sin t} + \cancel{K(t)e^{-\sin t}(-\cos t)} + \cancel{\cos t \cdot K(t)e^{-\sin t}} = (1+t)e^{-\sin t}$$

$$k'(t)\cancel{e^{-\sin t}} = (1+t)\cancel{e^{-\sin t}}$$

$$k'(t) = 1+t \qquad \int 1+t\,dt$$

$$k(t) = t + \tfrac{1}{2}t^2 + c$$

$$\boxed{x(t) = \left(t + \tfrac{1}{2}t^2 + c\right)e^{-\sin t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}}$$

řešení lze rozdělit na

$x_p(t) = \left(t + \frac{1}{2}t^2\right)e^{-\sin t}$ 1 partikulární řešení

a k němu přičteme všechna řešení homogenní rovnice $c \cdot e^{-\sin t}$.

OBECNĚ:

řešení lineární homogenní rovnice tvoří vektorový prostor – zde dimense 1 … $\mathrm{lin}\{e^{-\sin t}\}$

všechna řešení lineární rovnice s pravou stranou získáme tak, že najdeme 1 řešení (tzv. partikulární řešení) a k němu přičteme vektorový prostor řešení homogenní rovnice.

~ LINEÁRNÍ ALG: $Ax = b \qquad Ax = 0$

v našem případě roli matice A hraje lineární zobrazení $L: x \longmapsto x' + \cos t \cdot x$.

Př $x' + \cos t \cdot x = (1+t)e^{-\sin t}$

2. METODA INTEGRAČNÍHO FAKTORU

$$x' + p(t)x = q(t) \quad / \cdot e^{P(t)} \qquad P(t) = \int p(t)\,dt$$

$$\underbrace{e^{P(t)}x' + e^{P(t)} \cdot p(t) \cdot x}_{} = e^{P(t)} q(t)$$

$$\left(e^{P(t)} \cdot x\right)' = e^{P(t)} q(t) \quad / \int dt$$

$$e^{P(t)} x = \int e^{P(t)} q(t)$$

$$x = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t)$$

Pro naši rovnici: $x' + x \underbrace{\cos t}_{p(t)} = (1+t)e^{-\sin t}$

$$P(t) = \boxed{\int \cos t\,dt = \sin t}$$

přenásobíme rovnici $e^{\sin t}$:

$$\left(x \cdot e^{\sin t}\right)' = (1+t)\cancel{e^{-\sin t}}\,\cancel{e^{\sin t}}$$

$$x \cdot e^{\sin t} = \boxed{\int (1+t)\,dt} = t + \frac{1}{2}t^2 + c$$

$$\boxed{x(t) = \left(t + \frac{t^2}{2} + c\right) \cdot e^{-\sin t}, \quad t \in \mathbb{R}, \ c \in \mathbb{R}}$$

METODA INTEGRAČNÍHO FAKTORU JE VÝRAZNĚ RYCHLEJŠÍ !

Př.

$$x' + 2x = \cos t$$

$$t^3 x' - t x = 1$$

$$t x' - x = t^3 e^t$$

$$x' - x = t e^t$$, další ve sbírce úloh.