Kapitola 7

Postoptimalizace v LP

V této kapitole si povšimneme „ ex post“ změn v zadaní úloh LP. Jde o to, že po vyřešení zadané úlohy dojde ke změně zadání. Například se změní politika zadavatele, změní se jeho preference, do provozu je uvedena nová výrobní linka, začne se využívat nový výrobní postup, odběratelé změní své požadavky, změní se ceny, atd. Pokud jsme danou úlohu LP vyřešili Simplexovou metodou, pak při některých typech změn úlohy, můžeme nalezené řešení využít k nalezení optimálního řešení pozměněné úlohy. Vhodně pozměníme simplexovou tabulku a optimální řešení původní úlohy použijeme jako počáteční řešení k nastartování simplexového algoritmu nebo duálního simplexového algoritmu pro pozměněnou simplexovou tabulku.

Uvažujme, že jsme Simplexovou metodou vyřešili úlohu LP

$$\min\left\{c^\top x \,:\, x \in \mathbf{M}\right\}, \text{ kde } \mathbf{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = b,\ x \geq 0\}. \tag{7.1}$$

Máme tedy nalezenu optimální bázi $L \subset J = \{1, 2, \ldots, n\}$, která určuje $\widehat{x} = x\,(L)$ optimální řešení úlohy (7.1). Označme si $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ a $B = A_{I\times L}$, $D = A_{I\times(J\setminus L)}$, $\gamma = c_L$, $d = c_{J\setminus L}$. Víme, že je splněno

i) přípustnost $\widehat{x}_L = B^{-1}b \geq 0$;

ii) optimalita $\gamma^\top B^{-1}D - d^\top \leq \mathbf{0}^\top$ (nebo ekvivalentně $\gamma^\top B^{-1}A - c^\top \leq \mathbf{0}^\top$).

Připomeňme, že nenulové složky optimálního řešení jsou $B^{-1}b$ a optimální hodnota je $\gamma^\top B^{-1}b$.

Mohlo nastat několik změn:

Změna vektoru pravých stran $b \to b + \triangle b$.

Podmínka ii) i po změně platí, nezávisí totiž na b.
Otázkou však je, zda báze L je stále optimální?

Podmínka i) po změně platí, když

$$B^{-1}(b - \triangle b) \geq \mathbf{0}. \tag{7.2}$$

1. Nechť je (7.2) splněno.
   V tomto případě je L stále optimální báze, nenulové složky optimálního řešení jsou $B^{-1}(b - \triangle b)$ a optimální hodnota je $\gamma^\top B^{-1}(b - \triangle b)$.

2. Nechť (7.2) neplatí.
   V tomto případě je báze L duálně přípustná, ale není primárně přípustná.
   Přepočteme sloupec simplexové tabulky odpovídající nenulovým složkám bazického řešení, tj. zaměníme $B^{-1}b \to B^{-1}(b - \triangle b)$.
   Optimální řešení změněné úlohy nalezneme pomocí duální Simplexové metody.

Změna koeficientů účelové funkce $c \to c + \triangle c$.

Pak je báze L stále primárně přípustná, neboť i) na c nezávisí.
Musíme prověřit její duální přípustnost, tj. podmínku ii), což je

$$(\gamma + \triangle\gamma)^\top B^{-1}D - (d + \triangle d)^\top \leq \mathbf{0}^\top. \tag{7.3}$$

1. Jestliže (7.3) platí, tak je báze L optimální, nenulové složky příslušného optimálního řešení jsou $B^{-1}b$ a optimální hodnota je $(\gamma + \triangle\gamma)^\top B^{-1}b$.

2. Pokud (7.3) neplatí, pak je báze L pouze primárně přípustná.
   Opravíme záhlaví tabulky, tj. $c \to c + \triangle c$, a kriteriální řádek, tj.

   $$\gamma^\top B^{-1}D - d^\top \to (\gamma + \triangle\gamma)^\top B^{-1}D - (d + \triangle d)^\top .$$

   Optimální řešení změněné úlohy nalezneme pomocí Simplexové metody.

V úloze přibude nová proměnná; například se začne vyrábět další výrobek.

Dojde k rozšíření technologické matice a vektoru koeficientů účelové funkce

$$A \to (A \,|\, a^{n+1}), \quad c \to \begin{pmatrix} c \\ c_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Pak L je stále primárně přípustná, neboť podmínka i) není touto změnou ovlivněna.
Podmínka optimality ii) má tvar

$$\gamma^\top B^{-1}a^{n+1} - c_{n+1} \leq 0. \tag{7.4}$$

1. Pokud platí (7.4), pak původní řešení zůstává optimální také pro rozšířenou úlohu, zůstává stejná optimální hodnota a nový výrobek nevyrábíme, protože se to nevyplatí.

2. Jestliže (7.4) neplatí, pak rozšíříme simplexovou tabulku

			$c^\top$	c_{n+1}
γ	L	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$	$B^{-1}a^{n+1}$
		$\gamma^\top B^{-1}b$	$\gamma^\top B^{-1}A$	$\gamma^\top B^{-1}a^{n+1} - c_{n+1}$

   a pokračujeme v simplexové metodě.

   Vidíme, že v prvém kroku zařadíme novou proměnnou do báze. Nemusí však dojít k zastavení algoritmu. Nová proměnná však v bázi zůstane až do zastavení algoritmu.

Přibude nové omezení.

$\alpha^\top x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \leq \beta$.
Přidáme skluzovou proměnnou

$$\alpha^\top x + x_{n+1} = \beta,\ x_{n+1} \geq 0,\ c_{n+1} = 0.$$

Rozšířená úloha má omezení s indexy z množiny $\widetilde{J} = \{1, 2, \ldots, m+1\}$ a proměnné s indexy z množiny $\widetilde{J} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$. $n+1$ proměnných a její parametry jsou

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \alpha^\top & 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix},\ \widetilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Do báze přidáme novou proměnnou $\widetilde{L} = L \cup \{n+1\}$. Potom $\widetilde{L}$ je báze pro rozšířenou úlohu, protože matice

$$\widetilde{B} = \widetilde{A}_{\widetilde{L}\times\widetilde{I}} = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \alpha_L^\top & 1 \end{pmatrix} \quad \text{je regulární.}$$

Pro výpočet kritérií i) a ii) potřebujeme inverzní matici, která je

$$\widetilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{0} \\ -\alpha_L^\top B^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Chceme testovat přípustnost, tedy jestli platí

$$\widetilde{B}^{-1}\widetilde{b} = \begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{0} \\ -\alpha_L^\top B^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ -\alpha_L^\top B^{-1} b + \beta \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Horní část podmínky, tj. $B^{-1}b \geq 0$, je splněna, protože jde o optimální řešení původní úlohy. Zůstává tedy pouze podmínka

$$\alpha_L^\top B^{-1} b \leq \beta. \tag{7.5}$$

tedy, že optimální řešení splňuje podmínku přidaného omezení.

Podmínka optimality je zde

$$\begin{aligned} & (\gamma^\top, 0)\, \widetilde{B}^{-1}\widetilde{A} - \widetilde{c}^\top = (\gamma^\top, 0) \begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{0} \\ -\alpha_L^\top B^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \alpha^\top & 1 \end{pmatrix} - \widetilde{c}^\top \\ = \ & (\gamma^\top, 0) \begin{pmatrix} B^{-1}A & \mathbf{0} \\ -\alpha_L^\top B^{-1} A + \alpha^\top & 1 \end{pmatrix} - (c^\top, 0) \\ = \ & (\gamma^\top B^{-1} A - c^\top, 0) \leq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

neboť L je optimální báze původní úlohy.

Zjistili jsme, že $\widetilde{L}$ je duálně přípustná báze pro rozšířenou úlohu.

1. Když je splněna podmínka (7.5), pak $\widetilde{L}$ je optimální báze změněné úlohy, $\left(\begin{smallmatrix} B^{-1}b \\ -\alpha_L^\top B^{-1}b+\beta \end{smallmatrix}\right)$ jsou nenulové složky příslušného optimálního bazického řešení a optimální hodnota je $\gamma^\top B^{-1} b$.

2. Když podmínka (7.5) není splněna, pak $\widetilde{L}$ je pouze duálně přípustná báze pro změněnou úlohu. Rozšíříme tedy simplexovou tabulku

			$c^\top$	0
L	γ	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$	$\mathbf{0}$
$n+1$	0	$-\alpha_L^\top B^{-1}b+\beta$	$-\alpha_L^\top B^{-1}A+\alpha^\top$	1
		$\gamma^\top B^{-1}b$	$\gamma^\top B^{-1}A-c^\top$	0

a optimální řešení změněné úlohy nalezneme pomocí duálního simplexového algoritmu.

Pokud přibude omezení $\alpha^\top x \geq \beta$, pak je vynásobíme -1. Získáme tak nerovnost $-\alpha^\top x \leq -\beta$, na kterou již můžeme použít uvedený postup.

Pokud přibude omezení $\alpha^\top x = \beta$, pak je přepíšeme jako $\alpha^\top x \leq \beta$, $\alpha^\top x \geq \beta$. Na obě nerovnosti použijeme uvedený postup.