Afinní prostory

K těleso (perfektní)

$\overline{K}$ alg. uzávěr

$\mathbb{A}^n = \underbrace{\overline{K} \times \dots \times \overline{K}}_{n}$

$\mathbb{A}^n(K) = \underbrace{K \times \dots \times K}_{n}$ K-racionální afinní bod

$f \in K[x_1, \dots, x_n]$ $\quad V_f = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{A}^n ;\ f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0\}$

$K[x_1, x_2]$

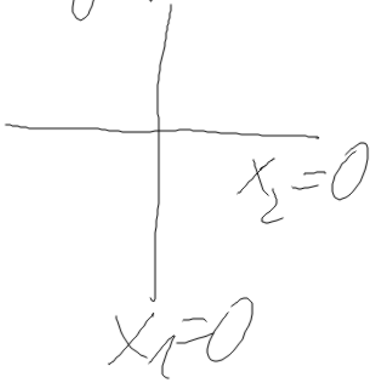
$K[x, y]$

Pracujeme s afinními křivkami

Rovinné

je to každá podmnožina V_f, $f \in K[x_1, x_2]$, $\deg(f) \geq 1$ afinního pr. $\mathbb{A}^2$

$f = x_1 x_2$



$f = f_1 \cdots f_k$ ired. rozkl.

$V_f = V_{f_1} \cup \dots \cup V_{f_k}$

splněna

$(f_i) \neq (f_j)$

$1 \leq i < j \leq k$

f_j není skalární násobek f_i

Pak V_f určuje (f) jednoznačně

Proto, pokud $C = V_f$, lze položit $K[C] = K[x_1, x_2]/(f)$ $\boxed{\text{Souřadnicový okruh křivky } C}$

$K[C]$ souř. okruh $\quad K[x_1,x_2]/(f)$ $\quad$ syntaktický algebr.

$K \supset C \quad a,b \in K[x_1,x_2]$

$a \sim b \iff \forall \alpha \in C \;\; a(\alpha)=b(\alpha)$

$\Updownarrow$

polynomy a a b se chovají na C stejně

$\sim$ třídy všechna možná polynomiální chování na C

poly. chování lze sčítat, násobit, tvoří tedy okruh

$a \sim b \iff a-b$ se nulují na $C \iff a-b \in (f)$

$a \sim b \iff a \equiv b \mod f$ $\quad$ sémantický geometrický funkcionální obor → podílové těleso

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $ad-bc=0$

Ireducibilní křivky

když $K[C] = K[x_1,x_2]/(f)$ oborem?

Podílové těleso $K[C]$ se nazývá funkční těleso křivky C. Proto $K(C)$ ← tak se značí

⟺ (f) prvoideál

⟺ $f \in K[x_1,x_2]$ ireducibilní.

$\frac{a+(f)}{b+(f)}$ $b+(f) \neq 0_{K[C]}$ ⟺ $b \notin (f)$

$\frac{a+(f)}{b+(f)} = \frac{c+(f)}{d+(f)}$ ⟺ $ad-bc \notin (f)$

Definuje se jen, tedy když f ireducibilní. A to je ⟺ když $C = V(f)$ je ireducibilní.

Pokud $\sigma \in K(C)$ tak řekneme, že $\frac{a}{b} \in K(x_1,x_2)$ reprezentuje σ, když $\sigma = (a+(f))/(b+(f))$

2 pohledy na $K(C)$

Ať $\sigma \in K(C)$, σ repr. a/b, $b \notin (f)$ $\quad C = V_f$

Potom $\exists$ body $\alpha \in C$, že $b(\alpha) = 0$ $\quad f \in K[x_1, x_2]$ ired.

To činí potíž při rozumném slova pojetí

Až tolik to nevadí $\quad \sigma(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$

Bodů $x \in C$, kde $b(\alpha) \neq 0$ je jen konečně mnoho. Pořád ale zůstává problém, že když $b(\alpha) = 0$ tak může $\exists$ repr. σ zlomkem $\dfrac{c(x)}{d(x)}$, kde $d(\alpha) \neq 0$. Jak se to řeší?

$$\alpha \xrightarrow[d(\alpha)\neq 0]{b(\alpha)\neq 0} \sigma(\alpha) = \frac{a(\alpha)}{b(\alpha)}$$

$$\alpha \xrightarrow[d(\alpha)= 0]{b(\alpha)\neq 0} \sigma(\alpha) = \frac{a(\alpha)}{b(\alpha)}$$

$$\xrightarrow[d(\alpha)\neq 0]{b(\alpha)= 0} \sigma(\alpha) = \frac{c(\alpha)}{d(\alpha)}$$

$\underline{\quad ?\quad}$

$d(\alpha) = 0 = b(\alpha)$

$$\sigma = \frac{a+(f)}{b+(f)} = \frac{c+(f)}{d+(f)}$$

$$ad - bc \in (f)$$

$$a(\alpha)\,d(\alpha) - b(\alpha)\,c(\alpha) = f(\alpha) = 0$$

$$\frac{a(\alpha)}{b(\alpha)} = \frac{c(\alpha)}{d(\alpha)}$$

Se σ lze asociovat ___ částečné zobrazení $C \to K$ definované skoro všude (až na kon. mnoho bodů)

σ def. v bodě $\alpha \in C$, když $\exists$ rep $\frac{a}{b}$, kde $b(\alpha) \neq 0$, tak $\sigma(\alpha) = a(\alpha)/b(\alpha)$

Alg. analýza $K(C)$ zachycuje množství strukturních vlastností C

Nástroj pro alg. analýzu $K(C)$ jsou diskrétní valuace

R je Gaussův obor (UFD), $p \in R$ ireducibilní

$a \in R$, $a \neq 0$, pak $\exists\, k \geq 0$ maximální, že $p^k \mid a$

Označíme $v_p(a) = k$

Položme $v_p(0) = \infty$

Vlastnosti $v = v_p$

(DV1) $v(ab) = v(a) + v(b)$

(DV2) $v(a+b) = \min(v(a), v(b))$

(DV3) $v(a) = \infty \iff a = 0$

(DV4) $\exists a \in R$, že $v(a) = 1$

Uvažme nyní F, podíl. těl. R

Položme $v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b)$

pak $v = v_p$ splňuje (DV1–4) pro $\forall a \in F$

Ať F je těleso. Zobrazení $\nu: F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ se nazývá <u>diskrétní valuace</u> pokud splňuje (DV1-3)

Je-li splněno i (DV4), jde o <u>normalizovanou DV</u>

$K[C]$ nalezly Gaussův. V $K(C)$ $\exists$ velké množství DV (vždy nekonečně mnoho)

Pracuje se s DV <u>nad K</u> což znamená

$\nu(a) = 0$ pro $\forall a \in K^*$.

$K \subseteq K(C)$

$K \subseteq K(C)$?

Jak K obsaženo v K(C)?

$K[C]$ i $K(C)$ jsou v. p. nad K (K-algebry)

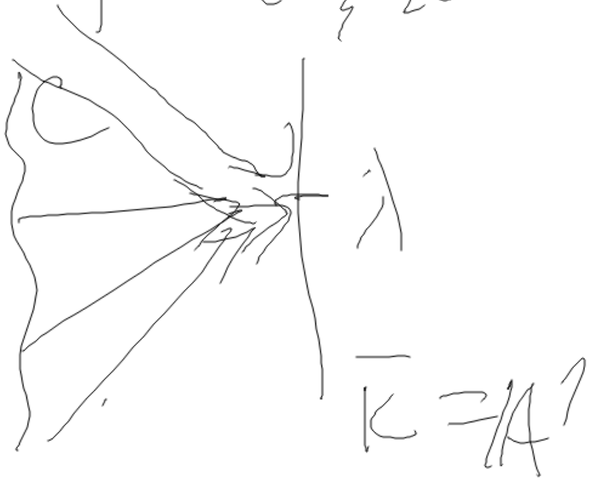
$$1_{K[C]} = 1_{K(C)} = 1 + (f)$$

$C = V(f)$

$f \in K[x_1, x_2]$ ired

$\lambda \in K$ ztotožňuje se

$$\lambda \cdot 1_{K[C]} = \lambda + (f)$$



Co jsou DV v $K(x)$ nad K?

$\frac{a(x)}{b(x)}$

$K[x]$ je UFD $\quad \forall p \in K[x]$ ired. polg. $\quad v_p$

Kromě v_p $\exists!$ DV. Značí se v_∞ a je def.

$v_\infty\left(\frac{a}{b}\right) = \deg(b) - \deg(a)$

$K = \overline{K} \quad p = x - \lambda \quad \lambda \in K = \overline{K}$

$1 \longleftrightarrow 1$ volba DV nad K a bod A^1

až na v_∞ $\quad\quad v_p \quad P^1$

$v_\infty \longleftrightarrow (1:0)$

$1 \longleftrightarrow$ DV a P^1 $\longleftarrow$ TATO VOLBA ZA URČ. OKOLNOSTÍ PLATÍ I PRO KŘIVKY

P^n n-rozměrný projektivní prostor

každý prvek P^n lze vyjádřit hom. souřadnicemi

$$(\alpha_1 : \dots : \alpha_{n+1}) = (\lambda\alpha_1 : \dots : \lambda\alpha_{n+1}) \quad \forall \lambda \in K^*$$

$\exists \alpha_i$, že $\alpha_i \neq 0$

$\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K$

Popsat P^n (zvláště P^2) s algebraicky definovanými zobrazeními znamená vypořádat se s nejednoznačností homogenních souřadnic

To budeme dělat 2 způsoby

(1) sledují nezávislé na volbě souřadnic

(2) vytvoříme vhodnou nezávislou na volbě

$\mathbb{P}^n$ n-rozměrný projektivní prostor

každý prvek $\mathbb{P}^n$ lze vyjádřit hom. souřadnicemi

$$(\alpha_1 : \dots : \alpha_{n+1}) = (\lambda\alpha_1 : \dots : \lambda\alpha_{n+1}) \quad \forall \lambda \in K^*$$

$\exists \alpha_i$, že $\alpha_i \neq 0$

$\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K$

Popsat $\mathbb{P}^n$ (zvláště $\mathbb{P}^2$) s algebraicky definovanými zobrazeními znamená vypořádat se s nejednoznačností homogenních souřadnic

To budeme dělat 2 způsoby

(1) sledujeme nezávislé na volbě souřadnic

(2) nesledujeme hodnoty

ad (1) Hom. polynom $\sum a_{i_1 \dots i_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}$

$\exists d$ $a_{i_1 \dots i_k} \neq 0 \Rightarrow i_1 + \dots + i_k = d$ nezávisle na volbě škály

Planární projektivní křivky

- $C \subseteq \mathbb{P}^2$ je $\iff \exists F \in K[x_1, x_2, x_3]$ že $\deg(F) \geq 1$

  $C = V_F = \{(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3) \in \mathbb{P}^2$, že $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0\}$

Pozn. $F(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3) = \lambda^d F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, kde $d = \deg(F)$

Křivka C je ireducibilní

$\iff C = V_F$ pro ireducibilní $F \in K[x_1, x_2, x_3]$

Homogenizace

$f = \sum a_{ij} x_1^i x_2^j \in K[x_1, x_2]$ ať homogenizace je na

$F = \sum a_{ij} X_1^i X_2^j X_3^{d-i-j}$, kde $d = \deg(f)$

Ať $d \geq 1$ $\quad (\alpha_1, \alpha_2) \in V_f \iff (\alpha_1 : \alpha_2 : 1) \in V_F$

Přejít od V_f k V_F znamená

přidat body $(\alpha_1 : \alpha_2 : 0)$ splňující $\sum_{i+j=d} a_{ij} \alpha_1^i \alpha_2^j = 0$

body v nekonečnu křivky $C = V_f$ (též křivky $C = V_F$)

f ireducibilní

$\Downarrow$

F ireducibilní

Funkční těleso projektivní křivky

Ať $C = V_F$, $F \in K[X_1, X_2, X_3]$ ireducibilní

F je homogenizace $f \in K[X_1, X_2]$

$h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = h(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)$ $\forall \lambda \in K^*$ $\longleftarrow$ chceme

$h = \frac{A}{B}$ $\deg(A) = \deg(B)$

A, B homogenní

$$K(C) = \left\{ \frac{A + (F)}{B + (F)} ;\ A, B \text{ hom.},\ \deg(A) = \deg(B) \right\} \cup \{0\}$$

$$K(C) \cong K(V_f) \cong K(V_F)$$

Hladkost

$f \in K[x_1, \dots, x_n]$, $\alpha \in \mathbb{A}^n$ takový, že $f(\alpha) = 0$

Řekneme, že f je hladká v bodě $\alpha \iff \exists i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\alpha) \neq 0$

$i \in \{1, \dots, n\}$

$\mathbb{A}^2$ $C = V_f$, $K[C] = K[x_1, x_2]/(f)$

GEOM.

C je hladká v $\alpha \in C$
α hladký bod C
C nesingulární v α
$\iff$ f hladká v α

NENÍ ⇓

C má v α singularitu

hladká = bez def. tečny

KŘIVKA NESINGULÁRNÍ = HLADKÁ $\iff$ Je hladká ve všech svých bodech.

Hladkost + homogenizace

Ať $F \in K[X_1, X_2, X_3]$ $\deg(F) \geq 1$

Ať $\alpha \in \mathbb{P}^2$ takový, že $F(\alpha) = 0$, $\alpha = (\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$

F je hladká $\iff \exists i \in \{1,2,3\}$, že

$$\frac{\partial F}{\partial X_i}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$$

Pro F homogenní vždy platí $X_1 \frac{\partial F}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial X_2} + X_3 \frac{\partial F}{\partial X_3} = dF$, kde $d = \deg(F)$

$f \longrightarrow F$ homogenizace

Pokud (α_1, α_2) byla singularita, tak $\alpha = (\alpha_1 : \alpha_2 : 1) \in V_F$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1}(\alpha) = 0 = \frac{\partial F}{\partial X_1}(\alpha_1, \alpha_2, 1) = \frac{\partial F}{\partial X_2}(\alpha_1, \alpha_2, 1)$$

HOMOGENIZACE ZACHOVÁVÁ AFINNÍ SINGULARITY

f hladká

$\Downarrow$

F hladká s možnou výjimkou bodů v nekonečnu

Existence a povaha DV

$C = V_F$ je hladká ireducibilní rovinná projektivní křivka. Ať $K = \bar{K}$

Tvrzení Každému $\alpha \in C$ odpovídá právě 1 DV $K(C) = \bar{K}(C)$ nad K

Značíme ji v_α. Přibližně, co dělá

Provedeme vysvětlení pro případ $C = V_f$, $f \in K[x_1, x_2]$ ireducibilní

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ hladký bod C

$$v_\alpha\left(\frac{a+(f)}{b+(f)}\right) = v_\alpha(a+(f)) - v_\alpha(b+(f))$$

Stačí znát $v_\alpha(a+(f))$

$a(\alpha) \neq 0 \Rightarrow v_\alpha(a+(f)) = 0$

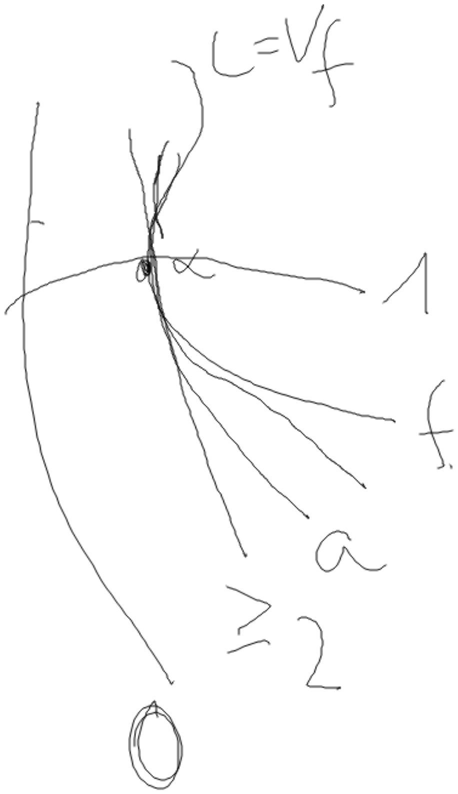
$a(\alpha) = 0 \Rightarrow v_\alpha(a+(f)) \geq 1$

$= 1 \iff$ a i f mají různé tečny

Pokud a a f sdílejí tečnu, tak $v_\alpha(a+(f)) \geq 2$

KDYŽ a hladká v α SHODA KŘIVOSTI v α

SMYSL DOBŘE VIDĚT 2 v_{x-1} $v\,K(x)$



Místa a hladkost

JE ZVYKEM MLUVIT O „MÍSTECH" A NE O DV

Místo formální pojem: $K(C)$ určenou DV z hladk

Označuji podmnožinu

Místo „příslušné" $\mathcal{V} = \{a \in K(C);\ \nu(a) \geq 1\}$

Místa $\Longleftrightarrow$ DV nad k

$1 \Longleftrightarrow 1$ NORMALIZOVANÉ

Je-li $k = \bar{k}$, tak každý hladký bod proj. křivek C určuje právě jedno místo. Nad singularitami může být více míst

$\boxed{\text{Místa v případě } K \neq \overline{K}}$

Intuitivní vodítko opět $K(x)$. Místa $K(x)$ odpovídají valuacím v_p a v_∞. Pro každé místo či valuaci lze definovat její stupeň. Vyjde, že $\deg(v_p) = \deg(p)$

$\deg(v_p) = 1 \quad p = x - \lambda, \ \lambda \in K \qquad \deg(v_\infty) = 1$

Místa stupně 1 $\overset{1-1}{\Longleftrightarrow}$ K-racionální body $\mathbb{P}^1$

Stupeň místa lze definovat pro $K(C)$, kde C hlad. afinní / hladkou projektivní křivka

Na hladké křivce platí: Místa stupně 1 $\overset{1-1}{\Longleftrightarrow}$ K-racionální body C

Místa stupně > 1 v $K(x)$

$p \in K[x]$ ireducibilní, $\deg(p) > 1$. Pak

s p asociujeme takové body $\mathbb{P}^1$ resp. $\mathbb{A}^1$, ale

je jich více než 1. Jsou to ty body $\zeta = (\zeta : 1)$,

kde $p(\zeta) = 0$. Místu danému $\mathcal{O}_p$ odpovídá $\deg(p)$ bodů

ϱ_1, ϱ_2 kořeny p a L je rozkladové nadtěleso polynomu p $\quad \exists \alpha \in \mathrm{Aut}_K(L)$, že $\alpha(\varrho_1) = \varrho_2$

K-automorfismus $\alpha(\lambda) = \lambda$ $\forall \lambda \in K$

$\alpha \in \mathrm{Aut}_K(L)$ lze rozšířit na $\beta \in \mathrm{Aut}_K(\overline{L})$

místa $\overset{1-1}{\Longleftrightarrow}$ orbity $\mathrm{Aut}_K(\overline{L})$

Místa stupně > 1 v $K(C)$

$C = V_f$, $f \in K[x_1, x_2]$ ireducibilní hladká

Pak $(\alpha_1, \alpha_2) \in C$ a $(\beta_1, \beta_2) \in C$ odpovídají témuž místu $\iff \exists L$, $K \leq L \leq \overline{K}$ a $\exists \varphi \in \mathrm{Aut}_K(L)$, že $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$, $i \in \{1, 2\}$

<u>Pozn.</u> Lze volit vždy $L = \overline{K}$.
Lze volit L vždy tak, aby $[L : K] < \infty$.

<u>Pozn.</u> Zde K perfektní