ApDR - 1. PŘEDNÁŠKA

I. POPULAČNÍ MODELY

I.1 Jednodruhové modely

• Odvození

$x(t)$ .... velikost populace ... $x: I \to \mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$
↳ interval
$t \in I$ reprezentuje čas

$x(t+\Delta t) = x(t)$ + přírůstek

malý časový úsek Δt

přírůstek je přímo úměrný Δt, $x(t)$

přírůstek $= r \cdot x(t) \cdot \Delta t$

$r > 0$

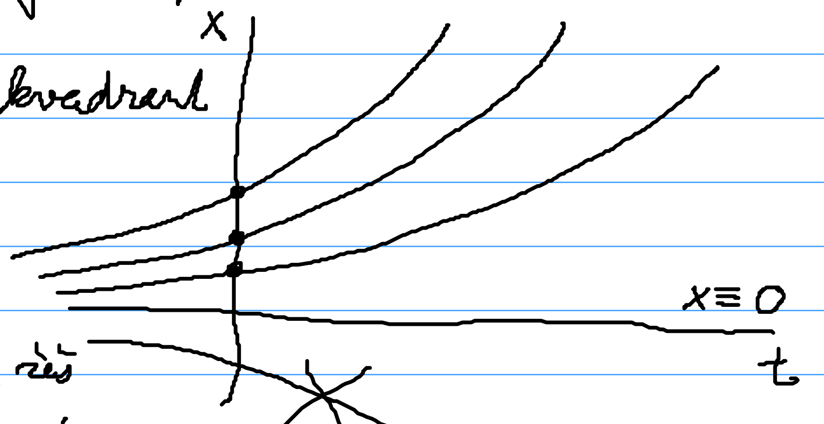
$$x(t+\Delta t) - x(t) = r\,x(t)\,\Delta t \qquad /:\Delta t$$

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = r\,x(t) \qquad \Delta t \to 0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{(1) \quad x'(t) = r \cdot x(t)}$$

Malthusův populační model

Už víme, že řešením je exponenciála $x(t) = e^{rt} \cdot x(0)$.



Zajímá nás především 1. kvadrant

kvalitativní analýza

$x(t) = 0 \Rightarrow x'(t) = 0$ ... stac. řeš

$x(t) > 0 \Rightarrow x'(t) > 0$ .... řešení v horní polorovině jsou rostoucí

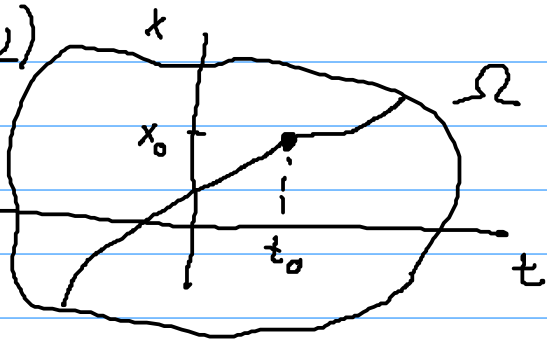
$$x''(t) = (x'(t))' = (r \cdot x(t))' = r \cdot x'(t) = r^2 \cdot x(t)$$

$x(t) > 0 \Rightarrow x''(t) > 0$ řešení jsou v horní polorovině konvexní.

Pokud řešení existuje, pak je v horní polorovině rostoucí a konvexní.

ZÁKADNÍ VLASTNOSTI ODR:

- Pro rovnici $x' = f(t,x)$, kde f je spojitá z otevřené $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$ a navíc lokálně lipschitzovská vzhledem k x (spojité parciální derivace podle x), platí:
  $\forall$ bod $(t_0, x_0) \in \Omega$ existuje právě jedno maximální řešení DR splňující $x(t_0) = x_0$.
  (PICARDOVA VĚTA)
- Toto řešení začíná a končí na hranici Ω
  (VĚTA O OPUŠTĚNÍ KOMPAKTU)



maximální = nelze prodloužit na větší interval

Model

- popisuje růst malých rozvíjejících se populací (pro větší populace to není dobrý model)
- počet vědeckých časopisů v letech 1780–1900
- růst kapitálu
- růst epidemií

- Vymírající populace $\boxed{(2) \quad x'(t) = -h \cdot x(t)}$, $h > 0$
  řešení $x(t) = e^{-ht} x(0)$

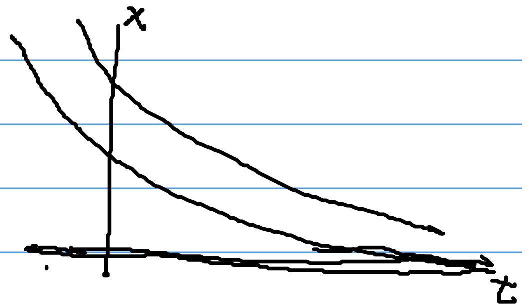
kvalitativní analýza: $x>0 \Rightarrow x'<0$

řešení v horní polorovině jsou klesající

$$x'' = (x')' = (-hx)' = -hx' = (-h)^2 x = h^2 x$$

$x>0 \Rightarrow x''>0$ ... konvexní

Z jednoznačnosti:
řešení v horní polorovině
neprotnou osu x



$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ existuje

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{x'(t)}{h} = 0.$$

Průměrná doba dožití

- Předpokládejme, že máme nějakou vymírající populaci $x(t)$ klesající

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$$

a takovou, že se nerodí žádní noví jedinci

(ne nutně popsanou rovnicí (2))

OZN. $p(t) = \dfrac{x(t)}{x(0)}$ ... to je procento jedinců, kteří se dožili věku t

Tvrzení: Průměrná doba dožití v této populaci je $\int_0^{+\infty} p(t)\,dt$.

„odvození" mezi časy t a $t+\Delta t$ umře

$x(t) - x(t+\Delta t)$ jedinců $\approx -x'(t)\cdot\Delta t$

průměrná doba dožití je
$$\frac{\sum_t t\cdot(-x'(t)\Delta t)}{\sum_t -x'(t)\Delta t} \approx \frac{-\int_0^{+\infty} t\cdot x'(t)\,dt}{\int_0^{+\infty} -x'(t)\,dt}$$

$$\int_0^{+\infty} -x'(t)\,dt = -\left(x(\infty) - x(0)\right) = x(0)$$

$$-\int_0^{+\infty} t\cdot x'(t)\,dt = \underbrace{\left[-t\cdot x(t)\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} 1\cdot x(t)\,dt = \int_0^{+\infty} x(t)\,dt$$

$$\frac{\int x(t)\,dt}{x(0)} = \int_0^{+\infty} p(t)\,dt$$

<u>Přesněji :</u> $P(s\leq t) = 1 - p(t)$

pravděpodobnost, že se jedinec nedožije věku t

P ... distribuční funkce, předp.: $\lim_{t\to+\infty} t\,p(t) = 0$

hustota $P' = -p'(t)$

Střední hodnota $\int_0^{+\infty} t\cdot(-p'(t))\,dt = \underbrace{\left[t\cdot p(t)\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} p(t)\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} p(t)\,dt$$

Zpět k rovnici (2) ... $x'(t) = -h\,x(t)$

$\Rightarrow$ střední doba dožití je $\int_0^{+\infty} e^{-ht}\,dt = \frac{1}{h}$.

<u>Tyto 2 modely se dají kombinovat</u> :

$x' = (r-h)\,x \qquad r, h > 0$

$r > h$ ... populace roste

$r < h$ ... populace vymírá

složitější modely ... koeficienty r, h nejsou konstantní.

Verhulstův populační model (logistický)

$x' = ax$ $\qquad a = r\left(1-\frac{x}{K}\right)$

tj. a závisí na x

$$\boxed{x' = r\left(1-\frac{x}{K}\right)x \quad (3)}$$

$r>0$ .... přírůstek z minulého modelu

dokud x je malé $\quad 1-\frac{x}{K} \doteq 1 \rightsquigarrow x' = rx$

pro $x \doteq K \quad \left(1-\frac{x}{K}\right)\doteq 0 \rightsquigarrow x'=0$

K... kapacita prostředí

Kvalitativní analýza: $x \geq 0$ $\qquad x=0 \Rightarrow$ konst. řeš.

$x<K \Rightarrow x'>0 \Rightarrow x$ roste

$x=K \Rightarrow x'=0$ ... konst. řešení

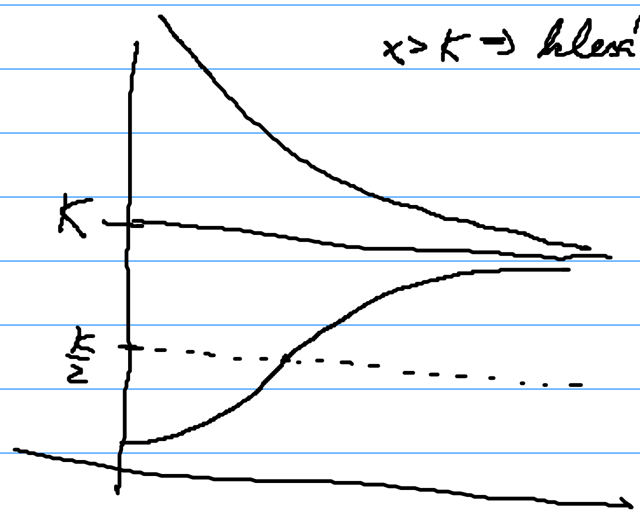
$x>K \Rightarrow x'<0 \Rightarrow x$ klesá

$$x'' = (x(t))' = \left(r x(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)\right)' =$$

$$= r\left(1-\frac{x}{K}\right)x' + rx\left(-\frac{1}{K}\right)x'$$

$$= r\left(1-\frac{2x}{K}\right)x' =$$

$$= r\left(1-\frac{2x}{K}\right) r x\left(1-\frac{x}{K}\right)$$



K
\+ konvexní
\- klesá ... konkávní
$\frac{K}{2}$
\+ roste ... konvexní
0

pro $\frac{K}{2}$ máme maximální růst ... x' maximální

I.2 Lotkův-Volterrův model dravec-kořist

predátor prey

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= (r - ky)x \\ y' &= (-h + px)y \end{aligned}}$$

x ... populace kořisti

y ... populace dravců

$r, k, h, p > 0$ konstanty

Význam konstant

$$x' = rx - kyx$$
$$y' = -hy + pxy$$

r ... jak dobře prosperuje populace kořisti

h ... rychlost vymírání dravců

k ... pravděpodobnost, že dravec kořist zabije (při setkání)

p ... efektivita zpracování potravy dravcem

Volterrova motivace

biolog Umberto d. Ancona 1914 - 1919

v úlovku rybářů se zvýšil podíl dravých ryb.

Volterrův model odpovídá na tuto otázku.

- kvadratický růst ... nerealistický pro velké hodnoty x, y

Kvalitativní analýza ... příště