1. CVIČENÍ – SEPARACE PROMĚNNÝCH

Diferenciální rovnice

$$x' = f(t, x)$$

- f je daná funkce 2 proměnných
- x je hledaná funkce proměnné t

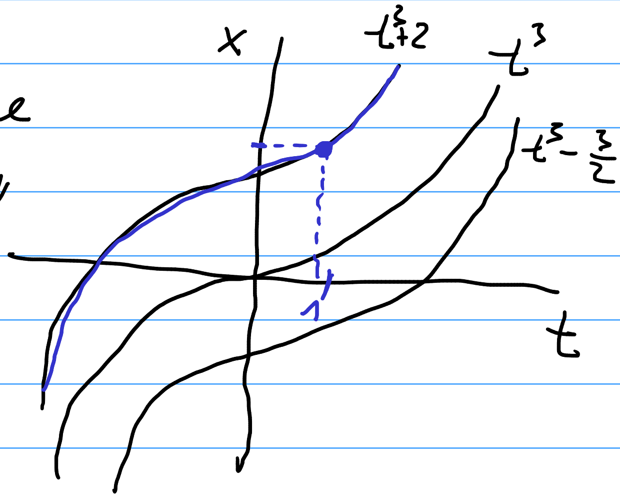
Řešení diferenciální rovnice je funkce $x: I \to \mathbb{R}$ (kde I je otevřený interval), které splňuje

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I.$$

Př. $x' = 3t^2$ $\qquad f(t,x) = 3t^2$

$x(t) = t^3 + c$, c … integrační konstanta

- musíme umět integrovat
- DR má typicky nekonečně mnoho řešení
- když rovnici doplníme počáteční podmínkou, $x(1) = 3$ je řešení nalezeno jednoznačně



- každým bodem roviny prochází právě jedno řešení.

Př $x' = 5x$ $f(t,x) = 5x$

když f závisí na x, tak to začíná být zajímavé!

a) • pro $x = 0$ je P.S. $= 0 \Rightarrow x(t) = 0 \ \forall t$

je řešení

stacionární řešení

• pro $x \neq 0$ ... vydělím x

$$\frac{x'}{x} = 5 \qquad / \int dt$$

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \int 5\,dt$$

$$\int 5\,dt = 5t + c$$

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \int \frac{1}{z}\,dz = \ln|z| = \ln|x(t)|$$

$z = x(t)$

$dz = x'(t)\,dt$

$$\ln|x(t)| = 5t + c \qquad k = e^c > 0$$

$$|x(t)| = e^{5t+c} = e^c \cdot e^{5t} = Ke^{5t}$$

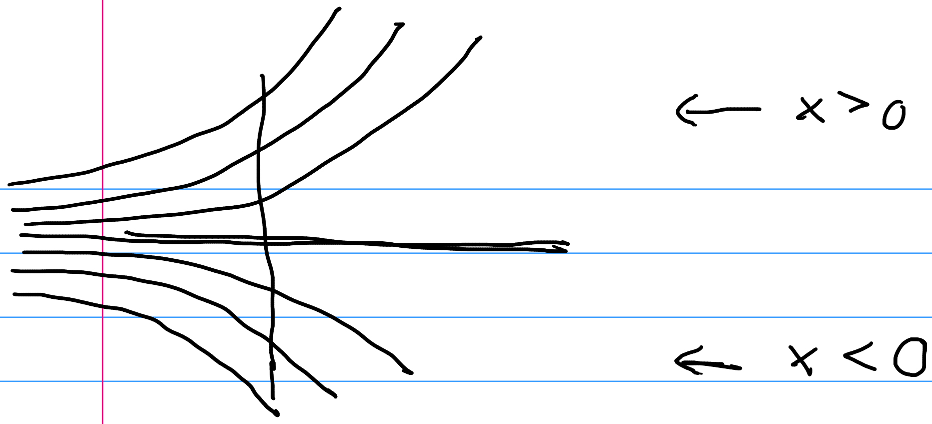
b) $x(t) > 0 \ldots \ \underline{x(t) = Ke^{5t}}, \ \underline{K > 0}$

c) $x(t) < 0$ $-x(t) = Ke^{5t}$

$\underline{x(t)} = -Ke^{5t} = \underline{\tilde{K}e^{5t}}$ $\underline{\tilde{K} < 0}$

$\tilde{K} = K$

a), b), c) dohromady: $x(t) = Ke^{5t}, \ t \in \mathbb{R}, \ K \in \mathbb{R}$



Když předepíšu $x(5)=6$ ⇝ dopočítám konstantu K a získám jediné řešení.

METODA SEPARACE PROMĚNNÝCH:

$x' = g(x)\,h(t)$ pro rovnice tohoto tvaru lze použít výše uvedený postup.

- $x_0 \dots g(x_0)=0$ .... stacionární řešení $x(t)=x_0$
- pro ostatní x $g(x)\neq 0$
  $\mathbb{R}$ se rozpadne na intervaly, kde $g>0$ nebo $g<0$
- na těchto intervalech vydělím $g(x)$

$$\frac{x'}{g(x)} = h(t) \qquad \Big/ \int dt$$

$$\int \frac{x'}{g(x)}\,dt = \int h(t)\,dt$$

$$H = \int h$$

$$G = \int \frac{1}{g}$$

$$\boxed{G(x(t)) = H(t) + c}$$

$$G(x(t))' = G'(x(t))\,x'(t) = \frac{x'(t)}{g(x(t))}$$

Pr $\quad x' = e^x(t+1) = \overset{e^x}{\overset{\shortparallel}{g(x)}}\,\overset{(t+1)}{\overset{\shortparallel}{h(t)}}$

Pr $\quad x' = x^2 + 1 \quad \rightsquigarrow \quad g(x) = x^2 + 1$

$$h(t) = 1$$

Pr $\quad x' = \dfrac{x^2 - x}{t}$