Procesy se spojitým časem

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — pravděpod. na $\mathcal{F}$

Ω: prostor elem. jevů

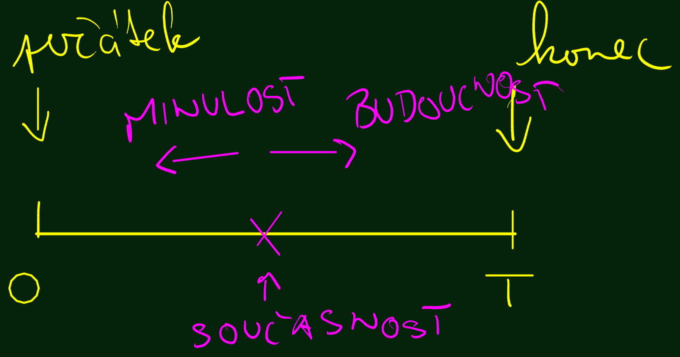
$\mathcal{F}$: σ-algebra

$X = \{X_t,\ t \in [0,T]\}$ stochastický proces, X_t je náhodná veličina $\forall\, t \in [0,T]$

$X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ měřitelné zobrazení

$X_t : \omega \longmapsto X_t(\omega)$

$t \qquad 0 \leq s < t \leq T$



$X_t(\omega)$

ČAS (t), zdroj náhody (ω)

pro pevné ω $\quad t \longmapsto X_t(\omega)$ trajektorie

Definice 1: Buď X stochastický proces $(\{X_t, t \in [0,T]\})$. X nazveme spojitý (zprava (zleva spojitý)), pokud $\boxed{\text{skoro všechny}}$ jeho trajektorie jsou spojité (zp./zl. spojité). ▽

$\{\omega;\ X(\omega) \text{ je spojitá funkce } [0,T] \to \mathbb{R}\} = C \subset \Omega$.

SKORO VŠECHNY: $\exists A \in \mathcal{F},\ P(A) = 1,\ A \subset C$

$\exists$ množina $\overset{A}{\text{míry } 1}$ taková, že $\forall \omega \in \Omega$ je $X(\omega)$ spojitá funkce

(tedy je měřitelná)

není potřeba studovat, co platí pro $\omega \notin A$.

Množinu B nazveme P-nulovou, pokud existuje $N \in \mathcal{F}$, $P(N) = 0$

a $B \subset N$

Definice 2: Buďte X a Y stochastické procesy na stejném p. prostoru

a) X a Y mají stejná konečně-rozměrná rozdělení, pokud

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall\ 0 \le t_1 < \dots < t_n \le T\ \forall\ B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$

$$P[X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n] = P[Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n]$$

$$P[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B] = P[(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in B] \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

$$B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$$

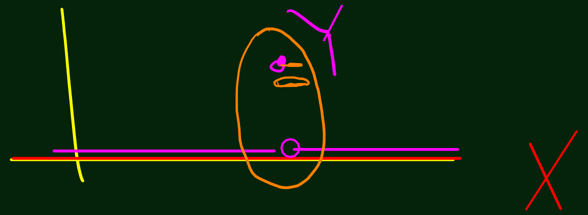
Toto nezaručuje! shodu rozdělení X a Y

b) X je modifikací Y, pokud $\boxed{\forall t \in [0, T] \quad P[X_t = Y_t] = 1}$

$$\{\omega : X_t = Y_t\} \in \mathcal{F} \qquad \{\omega ; X_t(\omega) - Y_t(\omega) = 0\}$$

c) X a Y jsou nerozlišitelné (ekvivalentní), pokud

$$\boxed{P[X_t = Y_t \ \forall t \in [0,T]] = 1}$$



cvičení: (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a)

$\Omega_1 = [0,1]$, $P \equiv$ Lebesgueova míra

$X_t(\omega) \equiv 0 \quad \forall t \qquad Y_t(\omega) = 1[t = \omega]$

$$\begin{matrix} P[X_t = Y_t] \\ \| \\ 0 \end{matrix} = P[Y_t = 0] = P[\underset{\substack{\cap \\ [0,1]}}{\omega};\ \omega = t] = P\{t\} = 0$$

$$P[X_t = Y_t \ \forall t] = 0$$

Tvrzení 3: (postačující podmínka ekvivalence) X, Y stochastické procesy X je modifikací Y. Nechť jsou oba zprava spojité.
Pak X a Y jsou nerozlišitelné.

tj. SKORO VŠECHNY TRAJEKTOR.

Důkaz: $\exists\, C_X \quad P(C_X)=1, \quad \forall \omega \in C_X$ je $X(\omega)$ zprava spoj. $\quad C = C_X \cap C_Y$

$ C_Y \quad \quad \quad \quad \quad \quad \# \quad \quad C_Y$

$P(C)=1 \quad \forall \omega \in C$ jsou $X(\omega)$ i $Y(\omega)$ zprava spojité.

$\forall q \in \mathbb{Q} \cap [0,T] \quad A_q, \; P(A_q)=1 \quad X_q(\omega) = Y_q(\omega) \;\; \forall \omega \in A_q$

$A_T, \; P(A_T)=1 \quad X_T(\omega) = Y_T(\omega) \;\; \forall \omega \in A_T$

$\Omega_0 = C \cap A_T \cap \left(\bigcap_q A_q\right) \quad P(\Omega_0)=1$

$\omega \in \Omega_0$ $\qquad X_T(\omega) = Y_T(\omega)$ $\qquad X_q(\omega) = Y_q(\omega)\ \forall q$

$\forall\ 0 \le t < T$

$$X_t(\omega) = \lim_{q \to t+} X_q(\omega) = \lim_{q \to t+} Y_q(\omega) = Y_t(\omega)$$

$$P[\underbrace{X_t = Y_t\ \forall t \in [0,T]}] = 1$$

$\{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\ \forall t \in [0,T]\}$ nemusí být měřitelné

ale! $\overset{\cup}{\Omega_0}$ a $P(\Omega_0) = 1$