$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K $\iff$ $s_n = a_1 + \dots + a_n \xrightarrow{n\to\infty} A \in \mathbb{R}$

3 – 1

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ K $\iff \alpha > 1$ ... $\sum \frac{1}{n}$ D $\sum \frac{1}{n^2}$ K

$a_n \geq 0$ ... $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum a_n$ K

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum a_n$ K

5.3. Neabsolutní konvergence řad

Definice Nechť pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

KVÍZ 1:

1) $\sum a_n$ K

2) $\sum a_n$ AK $(\sum |a_n|$ K$)$

Věta I.58 (Bolzano–Cauchyova podmínka pro konvergenci řad)

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě tehdy, ~~tehdy~~ když je splněna následující podmínka

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall m,n\in\mathbb{N},\ m\ge n_0,\ n\ge n_0 \ (m \ge n): \left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \varepsilon.$$

Dk: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K $\iff \exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$, $s_n = a_1 + \dots + a_n$

BC podm pro konvergenci posl

$$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall m,n \ge n_0\ |s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall m,n \ge n_0\ |(a_1+\dots+a_m) - (a_1+\dots+a_{n-1})| < \varepsilon$$

$$\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| = |a_n + a_{n+1} + \dots + a_m|$$

□

Věta L5.9 (vztah konvergence a absolutní konvergence)

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Dk: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ K $\overset{V5.8}{\Longrightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 : \ \sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon$$

Chceme dokázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K. Podle V5.8 stačí ověřit BC podmínku. K $\varepsilon > 0$ volme n_0 jako nahoře, pak $\forall m, n \geq n_0$

$$\left| \sum_{j=n}^{m} a_j \right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon . \overset{V5.8}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ K} \qquad \square$$

Důsledky: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

(1) Pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(2) Pokud $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

Navíc platí

(1') Pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(2') Pokud $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje $\forall x < 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ K$$

2. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ v závislosti na $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|$$

$|x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ K a to dokonce absolutně

$|x| > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ D

zbývá $x = 1$ a $x = -1$

$x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ D ze standardní škály

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ K z Leibnizova kritéria*

Pozn: Tedy z konvergence řady neplyne absolutní konvergence.

$\boxed{\text{Věta T 5.10}}$ (Leibnitzovo kritérium)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel,

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Př: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ .. $a_n = \frac{1}{n}$ nerostoucí $\lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ K

Kvíz 2: $\lim a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ K

Dk: "$\Rightarrow$" z nutné podmínky V5.1 $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

"$\Leftarrow$" $s_{2k+2} - s_{2k} = (-1)^{2k+2} \cdot a_{2k+2} + (-1)^{2k+1} \cdot a_{2k+1} =$

$= a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0$ $\leftarrow$ a_n nerostoucí

$\Rightarrow s_{2k}$ je nerostoucí

$s_{2k+1} - s_{2k-1} = -a_{2k+1} + a_{2k} \geq 0 \Rightarrow s_{2k+1}$ je neklesající

$s_{2k} = \underbrace{(-a_1 + a_2)}_{\leq 0} + \underbrace{(-a_3 + a_4)}_{\leq 0} + \dots + \underbrace{(-a_{2k-1} + a_{2k})}_{\leq 0} \leq 0$

$s_{2k+1} = -a_1 + (\underbrace{a_2 - a_3}_{\geq 0}) + (\underbrace{a_4 - a_5}_{\geq 0}) + \dots + (\quad) \geq -a_1$

$\Rightarrow s_{2k}$ omezená

$0 \geq s_{2k} = s_{2k+1} + a_{2k+1} \geq -a_1 + a_{2k+1} \geq -a_1$

analogicky
$$-a_1 \le s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \le 0 - a_{2n+1} \le 0$$

tedy i s_{2n+1} je omezená posloupnost.

Tedy podle věty o limitě monotónní posloupnosti

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_{2n} = S_1 \in \mathbb{R} \text{ a } \exists \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = S_2 \in \mathbb{R}.$$

Navíc

$$s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1}$$

$$S_2 = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - a_{2n+1}) \overset{?}{=}$$

$$= \cancel{AL} \; S_1 - \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S_1$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} s_n$ $\square$

KVÍZ 3: $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$

$\cancel{\exists \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}}$

Příklad:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \dots \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \quad \dots \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ \vdots & & & & & \\ \hline -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \dots & & \end{array} \Bigg| \; -2$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \vdots \\ \hline 2 \end{array}$$

Kolik je součet? 3–4

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sin n}{\underset{\parallel}{a_n}} \cdot \underset{\frac{1}{n}}{\underset{\parallel}{b_n}}}$$

$$\boxed{\sum a_n}$$

Lemma (Abelova parciální sumace)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $m \leq n$ a nechť $a_m, \dots, a_n, b_m, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Označme $s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$. Pak platí

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i = \sum_{i=m}^{n-1} s_i \cdot (b_i - b_{i+1}) + s_n b_n.$$

Dk: $\cancel{a_1 b_1 + a_2} = a_m \cdot b_m + a_{m+1} \cdot b_{m+1} + \dots + a_n \cdot b_n =$

$= s_m \cdot b_m + (s_{m+1} - s_m) \cdot b_{m+1} + \dots + (s_n - s_{n-1}) \cdot b_n =$

$= s_m \cdot (b_m - b_{m+1}) + s_{m+1} \cdot (b_{m+1} - b_{m+2}) + \dots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n$

$= \sum_{i=m}^{n-1} s_i \cdot (b_i - b_{i+1}) + s_n \cdot b_n$

$\square$