5. ŘADY

5.1. Úvod

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Def Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost. Číslo $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ nazveme n-tým částečným součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je konvergentní. Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je divergentní. Tuto limitu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklady: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ $\quad s_n = 1+1+\dots+1 = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ Řada diverguje.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1+1+(-1)+1+(-1)\dots$ $\quad s_1 = -1$, $s_2 = -1+1 = 0$, $s_3 = -1+1+(-1) = -1$, $s_4 = \dots = 0$

$s_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot(-1)^n$ limita neexistuje. Řada diverguje.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ $\quad s_n = q+q^2+\dots+q^n = q\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[|q|<1]{n\to\infty} \frac{q}{1-q} \in \mathbb{R}$

$|q|<1$

Řada konverguje pro všechna $|q|<1$.

Motivace: a) Taylorův polynom $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

b) cena akcie × dividenda   cena akcie .. c, výnos .. r dividenda 100 za rok

$$c = \frac{100}{1+r} + \frac{100}{(1+r)^2} + \frac{100}{(1+r)^3} + \dots = \frac{100}{1+r}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} = \frac{100}{1+r}\cdot\frac{1}{\frac{r}{1+r}} = \frac{100}{r}$$

$\boxed{\text{Věta 5.1}}$ (nutná podmínka konvergence)

Jestliže je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dk: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Rightarrow \exists \lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty}(a_1+\dots+a_m) =: s \in \mathbb{R}$

$$a_n = (a_1+\dots+a_n) - (a_1+\dots+a_{n-1}) = s_n - s_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} =$$

$$= s - s = 0$$

$\square$

Varování:  Z $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ neplyne konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ D

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}} + \underbrace{\dots\dots\frac{1}{16}}_{\geq 8\cdot\frac{1}{16}}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty.$$

Věta (5.2) (konvergence součtu řad) (i) Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ~~konv~~ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$ konverguje.

(ii) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Dk: (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K $\Rightarrow \exists$ limita $s_m = a_1 + \dots + a_m \xrightarrow{m\to\infty} s \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$ .. $\sigma_m = \alpha \cdot a_1 + \dots + \alpha \cdot a_m = \alpha \cdot s_m \xrightarrow{m\to\infty} \alpha \cdot s \in \mathbb{R}$

tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ K

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K $\quad a_1 + \dots + a_m = s_m \xrightarrow{m\to\infty} s \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ K $\quad b_1 + \dots + b_m = \sigma_m \xrightarrow{m\to\infty} \sigma \in \mathbb{R}$,

Nyní pro částečný součet $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ platí

$r_m = (a_1 + b_1) + \dots + (a_m + b_m) = s_m + \sigma_m \xrightarrow{m\to\infty} \cancel{s+\sigma}$ $s + \sigma \in \mathbb{R}$

$\square$

KVÍZ: $\sum a_n$ K a $\sum b_n$ D $\overset{?}{\Rightarrow} \sum (a_n + b_n)$ D

5.2 Řady s nezápornými členy

Pozorování: Nechť $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ je řada s nezápornými členy. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, nebo má součet $+\infty$.

Dk: $s_m = a_1 + \dots + a_m \leq a_1 + \dots + a_{m+1} = s_{m+1}$

$s_m \geq 0$ neklesající $\Rightarrow \exists \lim_{m \to \infty} s_m \in [0, \infty]$

$\boxed{\text{Věta L5.3}}$ (srovnávací kritérium) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

(„IDEA $a_n \leq b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$")

Dk: (i) Označme $s_n = a_1 + \dots + a_n$

$\sigma_n = b_1 + \dots + b_n$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí

$n \geq n_0\ a_n \leq b_n$

$$s_n = a_1 + \dots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n \leq a_1 + \dots + a_{n_0} + b_{n_0+1} + \dots + b_n$$
$$\leq a_1 + \dots + a_{n_0} + \sigma_n \leq$$
$$\leq a_1 + \dots + a_{n_0} + \sigma \in \mathbb{R}$$

$\sum b_n K \Rightarrow \exists \lim \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$

s_n neklesající $\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} s_n \in \mathbb{R}$

(ii) ano - viz (i) - opřímý důkaz $\square$

Příklady: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$

$$\underbrace{\frac{1}{2^n+3^n}}_{a_n} \leq \frac{1}{2^n} = b_n$$

$$\sum b_n K \overset{\text{srovnávací kritérium}}{\Longrightarrow} \sum \frac{1}{2^n+3^n} K$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} D$

$$\overset{b_n}{\frac{1}{2n+1}} \geq \overset{a_n}{\frac{1}{3n}} \qquad \sum \frac{1}{3n} \overset{V5.2}{=} \frac{1}{3} \cdot \sum \frac{1}{n} \; D$$

$\Rightarrow$ Podle srovnávacího kritéria $\sum \frac{1}{2n+1} D$.

Věta L 5.4 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*$. Pak

(i) Jestliže $A \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(ii) Jestliže $A = 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(iii) Jestliže $A = \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

KVÍZ: $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ $\boxed{\sum b_n D \overset{??}{\Longrightarrow} \sum a_n D}$

Dk: (i) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in (0,\infty)$ plyne k $\varepsilon = \frac{K}{2}$ $\exists n_0\ \forall n \geq n_0$ | 1-6

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon = \frac{K}{2} \Rightarrow \frac{K}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}K.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\ K \overset{V5.2.}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}K\,b_n\ K \ \&\ a_n \leq \frac{3}{2}K\cdot b_n \overset{V5.3.}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ K$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ K \ \&\ \frac{K}{2}\cdot b_n \leq a_n \overset{V5.3.}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{2}\cdot b_n\ K \overset{V5.2.}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ K$$

(ii) Z $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ k $\varepsilon = 1$ $\exists n_0\ \forall n \geq n_0$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < 1 \Rightarrow a_n < b_n \overset{V5.3.}{\Longrightarrow} \sum a_n\ K.$$

(iii) Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$. K 1 $\exists n_0\ \forall n \geq n_0$ $\frac{a_n}{b_n} > 1$.

$\Rightarrow a_n > b_n$ # a víme $\sum a_n\ K \Rightarrow \sum b_n\ K$ $\square$

Příklady: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+3n}$ $a_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+3n}$ $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+\sqrt{n}}{n^2+3n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{3}{n}} = 1 \in (0,\infty)$$

$\sum b_n D \overset{LSK}{\Longrightarrow} \sum a_n D$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ $a_n = \frac{n}{3^n}$ $b_n = \frac{1}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{3^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0$$

Heine $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\left(\frac{3}{2}\right)^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$ ...

$\sum \frac{1}{2^n} K \overset{LSK}{\Longrightarrow} \sum \frac{n}{3^n} K$