$$
p_d = \begin{cases} \displaystyle\sum_{e=(d+1)/2}^{d} \binom{d}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{d-e}, & d \text{ liché}, \\[2ex] \displaystyle\sum_{e=d/2+1}^{d} \binom{d}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{d-e} + \boxed{\frac{1}{2}\binom{d}{d/2} \varepsilon^{d/2}(1-\varepsilon)^{d/2}}, & d \text{ sudé}. \end{cases}
$$

$$
p_{2k-1} = p_{2k} < z^{2k} ,
$$

a tedy

$$
\boxed{p_d < z^d ,}
$$

kde

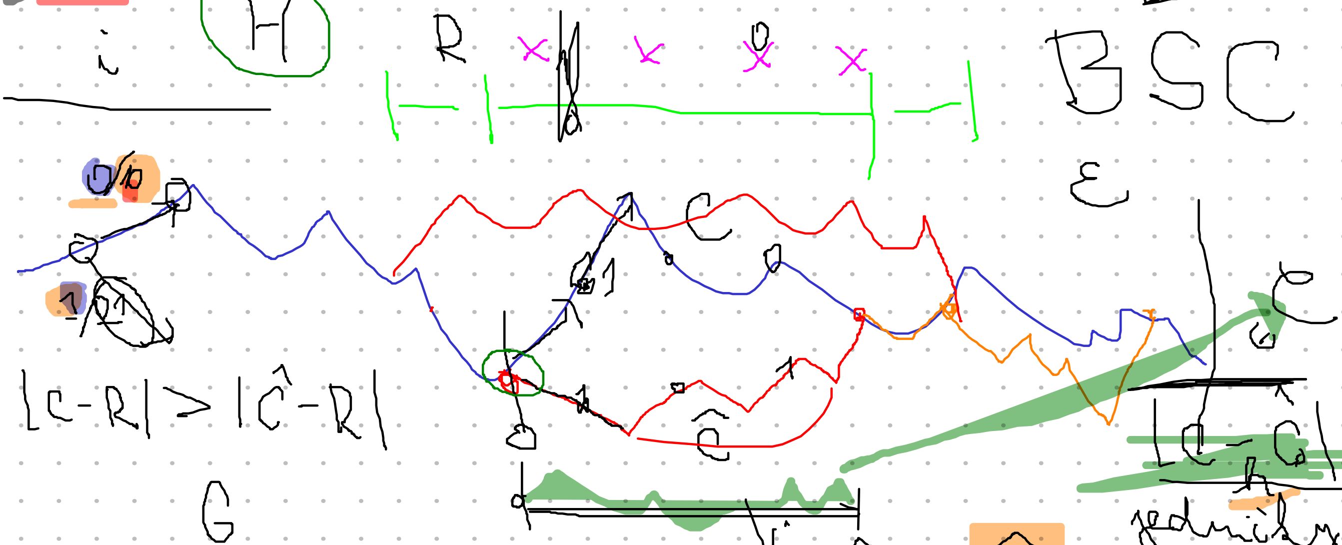
$$
\boxed{z := 2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)} .}
$$

11

i

H h

TVRDE BSC



$|c - R| > |\hat{c} - R|$

G

$\mu \longrightarrow v \rightsquigarrow r \longrightarrow \hat{v} \longrightarrow \hat{\mu}$

$|c - \hat{c}| = d$

jednicky

$d/2$

b/c

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} i_h \, p_{|h|} N,$$

i_h

$h \in \mathcal{C}$ $i_h = |u_h|$

$h \in G' = |\ldots|$

$P_b < \frac{1}{b}$

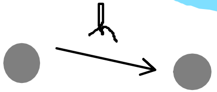
N_b

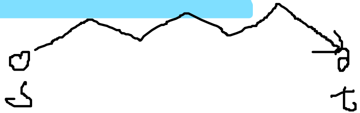
$$P_b < \frac{1}{b} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} i \, n(d, \ell, i) z^d .$$

h : ℓ delta

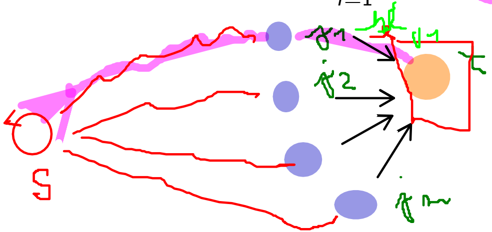
$d = |h|$ $i_h = |u_h|$

$$\underline{x^{(s,t)}} := \sum_{d\in\mathbb{N}} n_d^{(s,t)} W^d,$$

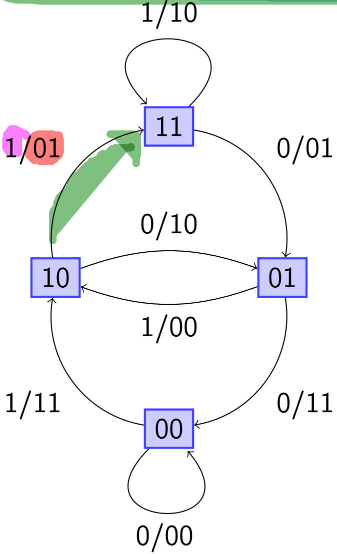




$$\underline{x^{(s,t)}} = \sum_{i=1}^{m} W^{h(e_{j_i})} \underline{x^{(s,j_i)}}.$$



$$G = \begin{pmatrix} 1 + D + D^2 & 1 + D \end{pmatrix}$$



$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_3 + W^2 \\
x_2 &= Wx_1 + Wx_2 \\
x_3 &= Wx_1 + Wx_2,
\end{aligned}
$$

pro hledané x_C platí

$$x_C = W^2 x_3.$$

Maticová podoba soustavy je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -W & 1-W & 0 \\ -W & -W & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & W^2 \\ -W & 1-W & 0 \\ -W & -W & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -W & 1-W & 0 \\ -W & -W & 1 \end{vmatrix}} = \frac{W^3}{(1-2W)}$$

a tedy

$$x_C = \frac{W^5}{(1-2W)} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j W^{j+5} .$$

$$x_j = \sum_{d,\ell,i\in\mathbb{N}} \underline{n^{(S,j)}_{d,\ell,i}} I^i \underline{W^d} L^\ell,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -LI \\ -WLI & 1-WLI & 0 \\ -WL & -WL & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^2LI \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_C = W^2 L x_3$$

a má řešení

$$x_C = \frac{W^5 L^3 I}{1 - WL(L+1)I} = \sum_{j=0}^{\infty} W^{j+5} L^{j+3} (L+1)^j I^{j+1}.$$

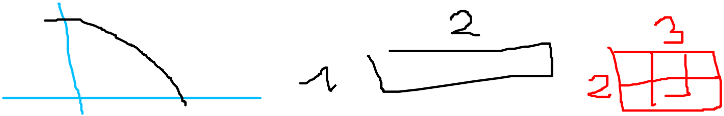
$$\sum_{d,\ell,i=0}^{\infty} n(d,\ell,i)\,W^d L^\ell I^i$$

$$\sum_{d=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} i\, n(d,\ell,i)\, z^d \, .$$

$$P_b < \frac{1}{b}\frac{\partial \sum_{d,\ell,i=0}^{\infty} n(d,\ell,i) W^d L^\ell I^i}{\partial I}\Bigg|_{\substack{W=2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}\\ L=1\\ I=1}}$$

$$\frac{W^5 L^3}{(1-WL(1+L)I)^2},$$

$$P_b < \frac{(2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)})^5}{(1-2(2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}))^2}.$$



Pro binární symetrický kanál s chybovostí 0.01 to znamená bitovou chybu méně než $0.9 \cdot 10^{-3}$. Konvoluční kód daný maticí $G = \begin{pmatrix} 1 + D + D^2 & 1 + D \end{pmatrix}$ s informačním poměrem 1/2 tedy snižuje pravděpodobnost chyby více než desetkrát. Srovnejme to s Hammingovým kódem (4, 7). Ten má mírně větší informační hustotu 4/7 a umí opravit jednu chybu. Pravděpodobnost alespon dvou chyb v bloku délky sedm je v našem kanálu zhruba $2 \cdot 10^{-3}$. Můžeme předpokládat, že neopravená chyba způsobuje průměrně dva chybné bity ve vstupní posloupnosti. Konvoluční kódovač je tedy (s mírně horší informační hustotou) zhruba čtyřikrát spolehlivější.