Počítání cest v grafu

Nechť $\mathcal{G} = (V, E)$ je orientovaný graf a nechť je navíc dáno ohodnocení hran $h : E \to \mathbb{N}$. Toto ohodnocení aditivně rozšíříme na cesty v $\mathcal{G}$, tedy

$$h(e_1, e_2, \ldots, e_j) = \sum_{i=1}^{j} h(e_i).$$

Chceme nyní určit, jaký je v $\mathcal{G}$ mezi dvěma zvolenými vrcholy v_s a v_t počet cest s daným ohodnocením d. Označme tento počet $n_d^{(s,t)}$. Hodnoty posloupnosti $(n_d)_{d\in\mathbb{N}}^{(s,t)}$ můžeme reprezentovat její *generující řadou*

$$x^{(s,t)} := \sum_{d\in\mathbb{N}} n_d^{(s,t)} W^d,$$

kde W je formální proměnná.

Mezi řadami $x^{(i,j)}$ nyní platí následující lineární vztahy. Jsou-li $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_m}$ všichni předchůdci vrcholu v_t a e_{j_i} jsou hrany vedoucí z v_{j_i} do v_t, pak platí

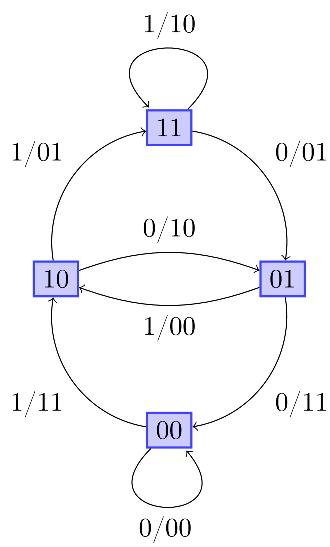
$$x^{(s,t)} = \sum_{i=1}^{m} W^{h(e_{j_i})} x^{(s,j_i)}.$$

Tento přístup umožňuje za určitých okolností spočítat efektivně $x^{(s,t)}$ a určit tak najednou všechna $n_d^{(s,t)}$. Stejný postup lze navíc použít pro vícenásobné ohodnocení $h : E \to \mathbb{N}^k$, stačí chápat W jako vektor formálních proměnných pro $d \in \mathbb{N}^k$ definovat

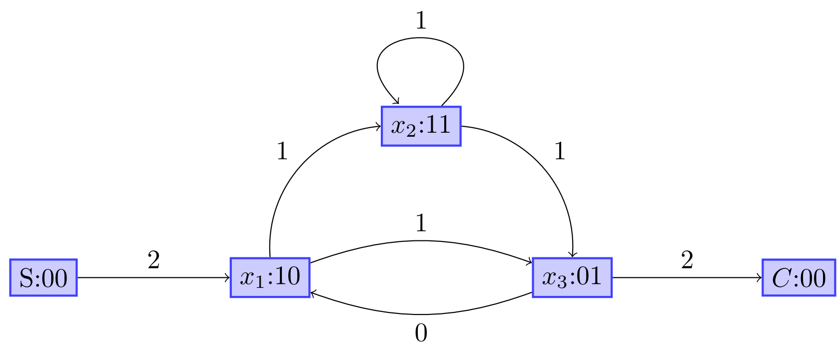
$$W^d := W_1^{d_1} W_2^{d_2} \cdots W_k^{d_k}.$$

Aplikujme tento postup na přechodový graf matice

$$G = \begin{pmatrix} 1 + D + D^2 & 1 + D \end{pmatrix}$$



Spočítejme nejprve pro jednoduchost počet cest s danou vahou výstupního vektoru, které začínají i končí ve vrcholu $\boxed{00}$ a jinak jím neprocházejí. Pro tento účel musíme vrchol rozdělit na dva, startovní a koncový, čímž dostaneme graf,



ve kterém je zaneseno značení příslušných generujících posloupností. Dostáváme následující soustavu:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_3 + W^2 \\
x_2 &= Wx_1 + Wx_2 \\
x_3 &= Wx_1 + Wx_2,
\end{aligned}
$$

a pro hledané x_C platí

$$x_C = W^2 x_3.$$

Maticová podoba soustavy je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -W & 1-W & 0 \\ -W & -W & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Z Cramerova pravidla máme

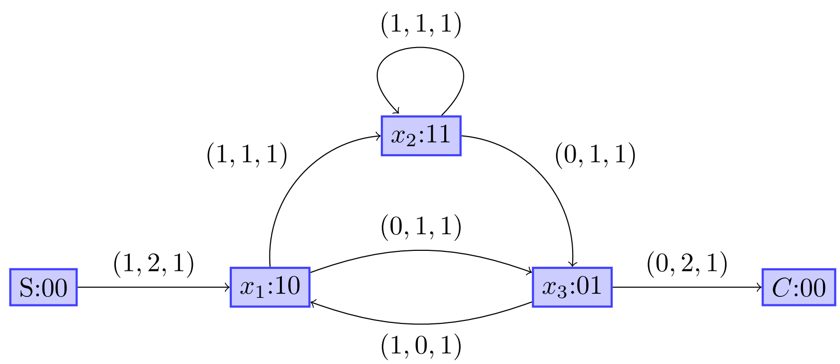
$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & W^2 \\ -W & 1-W & 0 \\ -W & -W & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -W & 1-W & 0 \\ -W & -W & 1 \end{vmatrix}} = \frac{W^3}{(1-2W)}$$

a tedy

$$x_C = \frac{W^5}{(1-2W)} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j W^{j+5} .$$

Zjistili jsme tedy, že kód generovaný kódovačem s uvedeným překladačem má minimální váhu kódového slova 5 a má 2^j slov váhy $j+5$ neprocházejících nulovým stavem pro každé $j \geq 0$.

Obohaťme nyní graf o další informace potřebné k odhadu bitové chyby. Přiřaďme každé hraně ohodnocení (d, ℓ, i), kde d označuje, jako výše, váhu výstupu, i označuje váhu vstupu a ℓ délku vstupu, v našem případě vždy 1. Graf tedy vypadá takto:



Příslušné řady mají nyní tvar

$$x_j = \sum_{d,\ell,i \in \mathbb{N}} n^{(S,j)}_{d,\ell,i} I^i W^d L^\ell,$$

kde $n^{(S,j)}_{d,\ell,i}$ je počet cest z $\boxed{\text{S:00}}$ do $\boxed{\text{C:00}}$ vstupní délky ℓ, vstupní váhy u a výstupní váhy v. Všimněme si, že původní jednoduchou řadu lze z této složitější získat dosazením $I = L = 1$.

Příslušná lineární soustava se od původní příliš neliší:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -LI \\ -WLI & 1-WLI & 0 \\ -WL & -WL & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^2LI \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_C = W^2 L x_3$$

a má řešení

$$x_C = \frac{W^5 L^3 I}{1 - WL(L+1)I} = \sum_{j=0}^{\infty} W^{j+5} L^{j+3} (L+1)^j I^{j+1}\,.$$

Zbývá si všimnout, že z řady

$$\sum_{d,\ell,i=0}^{\infty} n(d,\ell,i) W^d L^\ell I^i$$

dostaneme

$$\sum_{d=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} i\, n(d,\ell,i) z^d\,.$$

formální parciální derivací podle proměnné I a následným dosazením $I = 1$, $L = 1$ a $W = z$.

Pro binární symetrický kanál tedy celkově máme

$$P_b < \frac{1}{b} \frac{\partial \sum_{d,\ell,i=0}^{\infty} n(d,\ell,i) W^d L^\ell I^i}{\partial I} \Bigg|_{\substack{W = 2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)} \\ L = 1 \\ I = 1}}$$

V našem příkladu má derivace hodnotu

$$\frac{W^5 L^3}{(1 - WL(1+L)I)^2}\,,$$

a tedy

$$P_b < \frac{(2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)})^5}{(1-2(2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}))^2}\,.$$

Pro binární symetrický kanál s chybovostí 0.01 to znamená bitovou chybu méně než $0.9 \cdot 10^{-3}$. Konvoluční kód daný maticí $G = \begin{pmatrix} 1+D+D^2 & 1+D \end{pmatrix}$ s informačním poměrem 1/2 tedy snižuje pravděpodobnost chyby více než desetkrát. Srovnejme to s Hammingovým kódem $(4,7)$. Ten má mírně větší informační hustotu 4/7 a umí opravit jednu chybu. Pravděpodobnost alespoň dvou chyb v bloku délky sedm je v našem kanálu zhruba $2 \cdot 10^{-3}$. Můžeme předpokládat, že neopravená chyba způsobuje průměrně dva chybné bity ve vstupní posloupnosti. Konvoluční kódovač je tedy (s mírně horší informační hustotou) zhruba čtyřikrát spolehlivější.