Odhad chyby

V této kapitole budeme pro přehlednost značení vynechávat symbol vektoru pro vstup v daném čase. Informace, kterou chceme přenést, tzv. *informační posloupnost*, je tedy $u_0, u_1, u_2, \ldots$, kde $u_i \in \mathbb{F}^b$. Konvolučním kódovačem s poměrem b/c ji zakódujeme do *kódové posloupnosti* $v_0, v_1, v_2, \ldots,\ v_i \in \mathbb{F}^c$, kterou přeneseme kanálem se šumem a přijmeme posloupnost $r_0, r_1, r_2, \ldots,\ r_i \in \mathbb{F}^c$. Tuto posloupnost Viterbiho algoritmem opravíme na předpokládanou (nejpravděpodobnější) kódovou zprávu $\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \ldots,\ \widehat{v}_i \in \mathbb{F}^c$, kterou dekódujeme na předpokládanou informační zprávu $\widehat{u}_0, \widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \ldots,\ \widehat{u}_i \in \mathbb{F}^b$.

Pro daný konvoluční kódovač bychom nyní chtěli odhadnout pravděpodobnost chyby. Označme P_b průměrnou pravděpodobnost, že symbol $u_i^{(j)} \in \mathbb{F}$ bude dekódován chybně. V binárním případě $\mathbb{F} = \{0, 1\}$, na který se omezujeme, to můžeme psát jako $\widehat{u}_i^{(j)} = 1 - u_i^{(j)}$.

Chybové události konvolučního kódování se vždy dějí v *dávkách*, které odpovídají situaci, kdy Viterbiho algoritmus zvolí chybnou cestu mezi dvěma správnými stavy. Za jednu chybovou událost tedy pokládáme cestu mřížovím kódovače, která začíná a končí správným stavem, ale všechny vnitřní stavy jsou chybné.

Pro takovou jednotlivou chybu délky ℓ označme $\widehat{C}$ příslušnou část kódové posloupnosti $\widehat{v}_{i+1}, \widehat{v}_{i+2}, \ldots, \widehat{v}_{i+\ell}$, která se liší od vektorů správné kódové posloupnosti $C = v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{i+\ell}$. Protože začátek i konec dávkové chyby splývá se správnou cestou, existují dvě kódová slova, která se liší právě o rozdíl cest C a $\widehat{C}$. Jinak řečeno, rozdíl

$$C - \widehat{C} = \widehat{v}_{i+1} - v_{i+1}, \widehat{v}_{i+2} - v_{i+2}, \ldots, \widehat{v}_{i+\ell} - v_{i+\ell}$$

je sám kódovou posloupností (doplněn na obě strany nulami). *Dávkové chyby* tedy tvoří množinu $\mathcal{H}$ konečných kódových slov.

Nadále budeme pro jednoduchost uvažovat binární symetrický kanál s pravděpodobností chyby ε a Viterbiho dekódování s tvrdým rozhodováním, tedy s metrikou odpovídající Hammingově vzdálenosti. Nechť se C a $\widehat{C}$ liší na d místech, tedy nechť d je váha dávkové chyby $h = C - \widehat{C}$. Vztah mezi Viterbiho metrikami cest $\widehat{C}$ a C, je dán hodnotami posloupnosti $r_{i+1}, r_{i+2}, \ldots, r_{i+\ell}$ právě na těch místech, na kterých se kódové posloupnosti cest C a $\widehat{C}$ liší, tedy na místech, kde má h jedničku. Metrika chybové cesty je větší, a tato cesta je tedy pravděpodobnější než cesta správná, právě když se v rámci těchto d míst liší $r_{i+1}, r_{i+2}, \ldots, r_{i+\ell}$ od $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{i+\ell}$ na více než $d/2$ místech. Pro přesně $d/2$ rozdílů jsou obě cesty rovnocenné a cesta $\widehat{C}$ je zvolena s pravděpodobností $1/2$ (předpokládejme, že nerozhodný výsledek řeší algoritmus takto). Pravděpodobnost toho, že algoritmus volící takto mezi C a $\widehat{C}$ zvolí chybnou cestu $\widehat{C}$ (a dojde tedy k dávkové chybě h) je

$$p_d = \begin{cases} \displaystyle\sum_{e=(d+1)/2}^{d} \binom{d}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{d-e}, & d \text{ liché}, \\ \displaystyle\sum_{e=d/2+1}^{d} \binom{d}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{d-e} + \frac{1}{2}\binom{d}{d/2} \varepsilon^{d/2} (1-\varepsilon)^{d/2}, & d \text{ sudé}. \end{cases}$$

Hodnotu p_d pro sudé $d = 2k$ lze vzhledem k $\varepsilon < (1-\varepsilon)$ odhadnout takto:

$$p_d < \sum_{e=k}^{2k} \binom{2k}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{2k-e} < \sum_{e=k}^{2k} \binom{2k}{e} \varepsilon^k (1-\varepsilon)^k <$$
$$< \varepsilon^k (1-\varepsilon)^k \sum_{e=0}^{2k} \binom{2k}{e} = \left(2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}\right)^d .$$

Přímým výpočtem lze navíc ukázat, že platí $p_{2k-1} = p_{2k}$:

$$\begin{aligned}
p_{2k-1} &= (1-\varepsilon)\cdot p_{2k-1} + \varepsilon \cdot p_{2k-1} = \\
&= \sum_{e=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{2k-e} + \sum_{e=k+1}^{2k} \binom{2k-1}{e-1} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{2k-e} = \\
&= \binom{2k-1}{k} \varepsilon^k (1-\varepsilon)^k + \varepsilon^{2k} + \sum_{e=k+1}^{2k-1} \binom{2k}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{2k-e} = \\
&= \frac{1}{2}\binom{2k}{k} \varepsilon^k (1-\varepsilon)^k + \sum_{e=k+1}^{2k} \binom{2k}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{2k-e} = \\
&= p_{2k} .
\end{aligned}$$

Položíme-li tedy

$$z := 2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)} ,$$

dostáváme

$$p_{2k-1} = p_{2k} < z^{2k} ,$$

a tedy

$$p_d < z^d ,$$

pro všechna d.

Uvažujme nyní nějakou dávkovou chybu h délky ℓ, se vstupní vahou i a výstupní vahou d. Připomeňme, že dávková chyba je kódové slovo, které neprochází stavem nula (jinde než na začátku a na konci). Délkou ℓ rozumíme počet časových taktů, neboli počet vstupních a výstupních vektorů, neboli počet hran na cestě kódovačem. Jedná se tedy o vstup délky $b\ell$ bitů a výstup délky $c\ell$ bitů, přičemž vstup obsahuje i jedniček a výstup d jedniček. O chybě h víme, že její pravděpodobnost je méně než p_d a způsobí i chyb v dekódované posloupnosti $\widehat{\mathbf{u}}$. Očekávaný počet dávkových chyb h v posloupnosti délky N je menší než $p_d N$. Díváme se totiž postupně na všechny úseky cesty mřížovím délky ℓ, kterých je $N-\ell$, a ptáme se, jaká je pravděpodobnost, že chyby na zkoumaném úseku činí chybnou cestu vzniklou přičtením h pravděpodobnější než cestu správnou. Očekávaná hodnota počtu takových situací je méně než $p_d(N-\ell)$. Počet příslušných dávkových chyb je přitom ještě menší, uvažme např. situaci, kdy se dvě popsané události překrývají. Dekódování vstupní posloupnosti délky Nb tedy obsahuje očekávaný počet chyb menší než

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} i_h \, p_{|h|} N,$$

kde $|h|$ je váha posloupnosti h a i_h váha jí příslušné posloupnosti vstupní.

Označíme-li nyní $n(d, \ell, i)$ počet dávkových chyb délky ℓ se vstupní vahou i a výstupní vahou d, dostáváme horní odhad pravděpodobnosti P_b vstupní bitové chyby kódování

$$P_b < \frac{1}{b} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} i\, n(d, \ell, i) z^d \,.$$