1) $$F(a) = \int_1^\infty \frac{\cos\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{x^7}}\,dx, \quad a \neq 0$$

- Dokažte, že integrál konverguje pro $a \neq 0$.
- Dokažte, že $F$ je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Vyjádřete $F'(a)$ jako integrál
- Spočtěte $\lim_{a \to \infty} F(a)$

Označme $f_a(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{x^7}}$. Pak

$$|f_a(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x^7}}, \quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^7}}\, dx < \infty.$$

$\Rightarrow$ $F(a)$ konverguje absolutně pro $a \neq 0$.

Spojitost: Máme konv. majorantu, $a \mapsto f_a(x)$ je spojité pro $\forall x$ (na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$f_a$ je měř. pro $\forall a$ (spoj. na $(1,\infty)$.)

Věta o spoj. závislosti

$\Rightarrow$ $F(a)$ je spoj. na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Derivace: Označme $g(a,x) = f_a(x)$

$$\frac{\partial g}{\partial a}(a,x) = \frac{-\sin\left(\frac{x}{a}\right) \frac{-x}{a^2}}{\sqrt{x^7}} = \frac{\sin\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{x^7}} \cdot \frac{1}{a^2}$$

i.e. pro $\forall x$ ex. vlastní derivace podle $a$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

· měř. máme, konv. dodat.

Pro $a \in (\varepsilon, \infty)$ nebo $a \in (-\infty, -\varepsilon)$ platí

$$|g(a,x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x^6}} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = h_\varepsilon(x) \quad a$$

$$\int_1^\infty h_\varepsilon(x)\,dx < \infty \text{ podle LSK.}$$

Věta o diff. záv.

$\Longrightarrow$ $F$ má na $(-\infty, -\varepsilon)$ a $(\varepsilon, \infty)$

vlastní derivaci $(*)$ $F'(a) = \int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{x^5}} \cdot \frac{1}{a^2}\, dx$.

$\varepsilon \to 0$

$\Longrightarrow$ $F$ má vlastní derivaci na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a

na této množině platí $(*)$.

Pro výpočet $\lim\limits_{a \to \infty} F(a)$ použijeme Heineho větu.

Nechť $a_n \to \infty$. Označme $f_n = f_{a_n}$.

Pak $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\cos\left(\frac{x}{a_n}\right)}{\sqrt{x^7}} \overset{\text{VLSF (s), (P)}}{=} \dfrac{1}{\sqrt{x^7}}$

Konv. majoranta máme.

$$\overset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} F(a_n) = \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(x)\,dx =$$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^7}}\,dx = \left[-\frac{2}{5}\,x^{-5/2}\right]_1^\infty = \frac{2}{5}.$$

$a_n$ byla volena libovolně $\overset{\text{Heine}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{a\to\infty} F(a) = \frac{2}{5}.$

2) $F(a) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{1-\cos(ax)}{x} \, dx, \quad a \in \mathbb{R}$

- Dokažte, že integrál konverguje pro $a \in \mathbb{R}$.
- Spočítejte $F'$ na $\mathbb{R}$.
- Zintegrujte $F'$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos(ax)}{x} = 0$$

$$\int_0^\infty e^{-\delta x} \frac{1-\cos(ax)}{x}\, dx$$ konverguje absolutně

podle LSK

Označme $f(a,x) = e^{-\delta x} \dfrac{1-\cos(ax)}{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = e^{-\delta x} \frac{\sin(ax)\, x}{x} = e^{-\delta x} \sin(ax)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial a}(a,x) \right| \leq e^{-\delta x}, \quad \int_0^\infty e^{-\delta x}\, dx < \infty .$$

Víme: · $f(a,x)$ má pro $\forall x \in (0,\infty)$ vlastní derivaci podle $a$ pro $\mathbb{R}$

· $f(a,x)$ je pro $\forall a \in \mathbb{R}$ měřitelná (spojitá).

· $\int_0^\infty f(a,x)\,dx$ konv. pro $a \in \mathbb{R}$

· $\exists\, g(x) \geq 0$ $\int_0^\infty g(x) < \infty$ a $f(a,x) \leq g(x)$ $\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in (0,\infty)$

Věta o diferencovatelné ZnV.

$\Longrightarrow \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$$F'(a) = \int_0^\infty e^{-8x} \sin(ax)\, dx \overset{(*)}{=} \frac{a^2}{64+a^2}$$

$$(*): \int_0^\infty e^{-8x} \sin(ax)\, dx = \left[-\frac{1}{8} e^{-8x} \sin(ax)\right]_0^\infty$$

$$- \int_0^\infty -\frac{1}{8} e^{-8x} \cos(ax)\, a\, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \left( \left[ -\frac{1}{8} e^{-8x} \cos(ax)\, a \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{8} e^{-8x} \left(-\sin(ax)\, a^2\right) dx \right)$$

$$= \frac{a}{64} - \frac{a^2}{64} \int_0^{\infty} e^{-8x} \sin(ax)\, dx$$

$$F(a) = \int F'(a)\,da + c = \int \frac{a}{64+a^2}\,da + c$$

$$= \frac{\log(64+a^2)}{2} + c$$

$$0 = F(0) = \frac{\log(64+0)}{2} + c = \frac{\log(64)}{2} + c$$

$$\Rightarrow c = -\frac{\log(64)}{2}$$

$$\Rightarrow F(a) = \frac{\log(64+a^2) - \log(64)}{2}$$

3) $$F(a) = \int_0^\infty \frac{\exp(-a(x+1))}{x+1} (2x+1)$$

- Dokažte konvergenci integrálu pro $a > 0$
- Vyjádřete první a druhou derivaci $F$ na $(0,\infty)$
- Vyšetřete konvexitu / konkavitu a monotonii na $(0,\infty)$

Označme $f(a,x) = \frac{\exp(-a(x+1))}{x+1}(2x+1) \geq 0$

Pak $\lim_{x \to 0^+} f(a,x) \in \mathbb{R}$

$\int_0^\infty f(a,x)\,dx < \infty$ podle LSK

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = -\exp\left(-a(x+1)\right)\cdot(2x+1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,x) = \exp\left(-a(x+1)\right)(2x+1)(x+1)$$

- Jak $f$ tak $\frac{\partial f}{\partial a}$ má pro $\forall a \in (0,\infty)$ vlastní derivaci podle $a$ na $(0,\infty)$
- Obě funkce jsou měř. pro $\forall a \in (0,\infty)$ (spoj.)

O $f$ víme, že $\int_0^\infty f(a,x)\,dx < \infty$ pro $\forall a \in (0,\infty)$,

pro $\frac{\partial f}{\partial a}$ platí totéž.

Nechť $\varepsilon > 0$, pak pro $a \in (\varepsilon, \infty)$ a $x \in (0,\infty)$

platí

$$\left| \frac{\partial f}{\partial a}(a,x) \right| \leq \exp\left(-\varepsilon (x+1)\right)(2x+1)$$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,x) \right| \leq \exp(-\varepsilon(x+1))\,(x+1)(2x+1)$$

a obě pravé strany jsou integrovatelné.

Věta...

$$\Rightarrow \quad F'(a) = \int_0^\infty -\exp(-a(x+1))(2x+1)\,dx$$

$$F''(a) = \int_0^\infty \exp(-a(x+1))(2x+1)(x+1)\,dx$$

pro $a \in (\varepsilon, \infty) \Longrightarrow a \in (0, \infty)$.

Dostáváme $F(a) > 0$ na $(0, \infty)$, $F'(a) < 0$, $F''(a) > 0$

tamtéž $\Rightarrow$ $F$ je na $(0, \infty)$ klesající a

konvexní.

(4) $F(a)=\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx$ (velmi stručně).

- Konvergence na $\mathbb{R}$
- Derivace na $(0,\infty)$
- Ukažte, že $\frac{\sin(ax)}{e^x-1}=\sin(ax)\,e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}$
- Vyjádřete $F$ jako řadu a dopočítejte.

· Konv. je jasná

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = \frac{\cos(ax)\,x}{e^x - 1}$$

$$\left| - a - \right| \leq \frac{|x|}{|e^x - 1|}$$ konv. majoranta

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,x}{e^x - 1}\,dx.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad , q \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

$$\sin(ax)\, e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{\sin(ax)}{e^{x}-1}$$

$$F(a) = \int_0^\infty \underbrace{\sin(ax)\, e^{-x} \sum_{n=0}^\infty e^{-nx}}_{|\cdots| \le \frac{|\sin(ax)|}{e^x - 1}} \overset{\text{Lebesgue}}{=} \dots$$