Zápočtová písemka 5.10. 2018

1.(10 bodů) Spočtete derivaci (popřípadě jednostranné derivace) funkce

$$f(x) = e^{|x^2+2x|} .$$

2.(15 bodů) Spočtěte následující limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+(\tan 2x)^2)}{\arctan(5x^2)} .$$

3.(15 bodů) Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{n^2+2}{n^2}}\right)^{\frac{1}{1-\cos\frac{1}{n}}}$$

4.(10 bodů) Rozhodněte o platnosti následujících implikací

$A)$ Existuje $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = A \in \mathbf{R} \Rightarrow$ Existuje $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$B)$ Existuje $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = A \in \mathbf{R} \Rightarrow$ Existuje $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x)$.

Podmínkou k udělení zápočtu je získání 25 bodů.

Přeji Vám mnoho štěstí.

Stručné řešení je na následující straně.

1.
$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2+2x} & \text{pro } x\in(-\infty,-2] \\ e^{-(x^2+2x)} & \text{pro } x\in[-2,0] \\ e^{x^2+2x)} & \text{pro } x\in[0,\infty) \end{cases}$$
, a tedy
$$f'(x)=\begin{cases} e^{x^2+2x}(2x+2) & \text{pro } x\in(-\infty,-2) \\ e^{-(x^2+2x)}(-2x-2) & \text{pro } x\in(-2,0) \\ e^{x^2+2x)}(2x+2) & \text{pro } x\in(0,\infty) \end{cases}.$$
V bodech $0,2$ spočteme jednostanné derivace jako limitu derivací
$$f'_-(-2)=\lim_{x\to 2-} e^{x^2+2x}(2x+2)=-2,\ f'_+(-2)=\lim_{x\to 2-} e^{-(x^2+2x)}(-2x-2)=2$$
a analogicky $f'_-(0)=-2$, $f'_+(0)=2$.

2.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+(\tan 2x)^2)}{\arctan 5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+(\tan 2x)^2)}{(\tan 2x)^2}\frac{(\tan 2x)^2}{(2x)^2}\frac{4}{5}\frac{5x^2}{\arctan 5x^2}=\frac{4}{5}.$$
Na první limitu jsme použili VOLSF (P) a $(\tan 2x)^2\neq 0$ na $P(0,\frac{1}{2})$, na druhou $\lim\frac{\sin 2x}{2x}=1$ a na poslední
$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\arctan 5x^2}$$
použijeme VOLSF (P) s $5x^2\neq 0$ na $P(0,1)$ a $\lim_{y\to 0}\frac{y}{\arctan y}=\lim_{z\to 0}\frac{\tan z}{\arctan(\tan z)}=1$ podle VOLSF (P) s $\tan z\neq 0$ na $P(0,1)$.

Mělo by to jít i dvakrát l'Hospitalem.

3. Podle Heineho
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}\frac{1}{1-\cos\frac{1}{n}}}=\lim_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{1}{2}\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{1}{1-\cos x}\log(1+2x^2)}$$
podle VOLSF (S), kde e^y je spojitá. Dále standardně
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\cos x}\frac{2x^2}{\frac{x^2}{2}}\frac{\log(1+2x^2)}{2x^2}=2,$$
kde jsme použili VOLSF (P) s $2x^2\neq 0$ na $P(0,1)$ u poslední limity. Celkově je výsledek e^2.

4. A) neplatí pro $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

B) platí. Z definice $\lim|f(x)|=A$ (pro $\varepsilon=1$) existuje δ_1, že pro $x\in P(0,\delta_1)$ platí $|f(x)|\in(A-1,A+1)$, a tedy $|f(x)|\leq A+1$ (zřejmě $A\geq 0$).

Nechť $\varepsilon>0$ je libovolné. Z definice $\lim_{x\to 0}|f(x)|=A$ existuje $0<\delta<\delta_1$ tak, že pro $x\in P(0,\delta)$ platí $||f(x)|-A|<\varepsilon$. Tedy
$$|f^2(x)-A^2|=||f(x)|^2-A^2|=||f(x)|-A|\cdot||f(x)|+A|<\varepsilon\cdot||f(x)|+A|\leq\varepsilon\cdot(A+1+A).$$