

Geometrie

cvičení - kuželosečky a kvadriky

DÚ V \mathbb{R}^2 určete pomocí otočení typ a základní prvky kuželosečky dané rovnicí

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

DÚ Najděte doma kružnici, lampu a stěnu. Pozorujte stíny, které vrhá kružnice na (jednu) stěnu při osvětlení z lampy. Jaké útvary vznikají?

DÚ 2 V \mathbb{R}^2 je dána kuželosečka $c : 2x^2 - 3xy - 2y^2 + 21x + 3y + 27 = 0$ a směr $\vec{s} = (0, 3)$.

- Převeďte rovnici c do homogenních souřadnic.
- Určete, zda je singulární/ regulární a určete její singulární body
- Napište rovnice poláry p daného směru \vec{s} ke kuželosečce c .
- Určete průsečíky kuželosečky c a kružnice k se středem v bodě $S(-3, 3)$ o poloměru $r = \sqrt{5}$.

DÚ 2 V \mathbb{R}^3 je dána kvadrika: $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 7 = 0$ a bod $P = [0, 0, -7]$.

- Převeďte rovnice \mathcal{Q} do homogenních souřadnic.
- Určete polární nadrovinu bodu P vzhledem ke \mathcal{Q} a její průnik c s kvadrikou \mathcal{Q} .
- Na ose z najděte bod harmonicky sdružený k bodu P vzhledem k páru průsečíků osy z s kvadrikou \mathcal{Q} .

DÚ 3 V \mathbb{R}^3 je dána kvadrika: $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 + z - 1 = 0$ a rovina $\rho : x - y - 2z + 1 = 0$.

- Převeďte rovnice \mathcal{Q} a ρ do homogenních souřadnic.
- Klasifikujte kvadriku (afinně).
- Určete množinu bodů, která je kolmým průmětem řezu kvadriky \mathcal{Q} rovinou ρ do roviny $z = 0$ v \mathbb{R}^3 .

DÚ 3 Vyberte si jeden z následujících příkladů na klasifikaci kuželoseček a vyřešte jej. Pro kontrolu použijte např. GeoGebru (zadáním rovnice do vstupu). Pro inspiraci použijte materiál *Meziřádky mezi kuželosečkami*.

(*) U příkladů na klasifikaci kuželosečky určete

- projektivní vlastnosti - singulární/ regulární + singulární body, reálná/ formálně reálná
- afinní vlastnosti - typ KS, středová/ nestředová + střed, asymptotické směry + asymptoty
- metrické vlastnosti - hlavní a vedlejší směry, osy, vrcholy, ohniska, řídicí přímku paraboly

1. V \mathbb{R}^2 je dána kuželosečka $c : 7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$ a bod $P = [1, 0]$

- Převeďte rovnici c do homogenních souřadnic.
- Klasifikujte kuželosečku c , t.j. určete:
 - projektivní vlastnosti - singulární/ regulární + singulární body, reálná/ formálně reálná
 - afinní vlastnosti - typ kuželosečky, středová/ nestředová + střed, asymptotické směry + asymptoty

- metrické vlastnosti - hlavní směry, osy, vrcholy, ohniska, řídicí přímku paraboly (v závislosti na typu KS)
- (c) Napište rovnice poláry p bodu P a tečen t_1, t_2 z bodu P ke kuželosečce c .
- (d) Najděte sdružené průměry kuželosečky, je-li jeden z nich rovnoběžný s přímkou $m : y = 0$.
2. V \mathbb{R}^2 je dána kuželosečka $c : 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$ a bod $P = [4, -3]$
- (a) Převed'te rovnici c do homogenních souřadnic.
- (b) Klasifikujte kuželosečku c , t.j. určete:
- projektivní vlastnosti - singulární/ regulární + singulární body, reálná/ formálně reálná
 - afinní vlastnosti - typ kuželosečky, středová/ nestředová + střed, asymptotické směry + asymptoty
 - metrické vlastnosti - hlavní směry, osy, vrcholy
- (c) Jeden průvodič kuželosečky má rovnici $p_1 : -8x_1 + 6x_2 + 5x_0 = 0$. Určete druhý průvodič, ohniska, resp. řídicí přímku paraboly (v závislosti na typu KS).
- (d) Napište rovnice poláry p bodu P a tečen t_1, t_2 z bodu P ke kuželosečce c .
3. V \mathbb{R}^2 je dána kuželosečka $c : 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 2y - 17 = 0$, bod $P = [1, 2]$ a přímka $q : x - 5 = 0$.
- (a) Převed'te rovnici c do homogenních souřadnic.
- (b) Klasifikujte kuželosečku c , t.j. určete:
- projektivní vlastnosti - singulární/ regulární + singulární body, reálná/ formálně reálná
 - afinní vlastnosti - typ kuželosečky, středová/ nestředová + střed, asymptotické směry + asymptoty
 - metrické vlastnosti - hlavní směry, osy, vrcholy, ohniska, řídicí přímku paraboly (v závislosti na typu KS)
- (c) Napište rovnice poláry p bodu P a pólu Q přímky q vzhledem ke kuželosečce c .
- (d) Napište v homogenních souřadnicích rovnici kuželosečky, kterou tvoří osy kuželosečky c .
4. V \mathbb{R}^2 je dána kuželosečka: $c : 4x^2 + 3y^2 - 16 = 0$ a bod $P = [4, 0]$.
- a) Převed'te rovnici c do homogenních souřadnic.
- b) Klasifikujte typ kuželosečky (*).
- c) Napište rovnice poláry p bodu P a tečen t_1, t_2 z bodu P ke kuželosečce c .
- d) Zvolte libovolnou sečnu s kuželosečky c a označte $X, Y = c \cap s$ a $Q = p \cap s$. Zjistěte hodnotu dvojpoměru $(X, Y; P, Q)$.
5. V \mathbb{R}^2 je dána kuželosečka: $c : 2x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + 2y + 10 = 0$ a směr $\vec{s} = (-1, 1)$.
- a) Převed'te rovnici c do homogenních souřadnic.
- b) Klasifikujte typ kuželosečky (*).
- c) Napište rovnice tečen t_1, t_2 ve směru \vec{s} ke kuželosečce c .
6. V \mathbb{R}^2 je dána kuželosečka $c : xy + 2x + 3y = 0$ a bod $P = [-3, -2]$
- a) Převed'te rovnici c do homogenních souřadnic.
- b) Klasifikujte typ kuželosečky (*).
- c) Napište rovnice poláry p bodu P a tečen t_1, t_2 z bodu P ke kuželosečce c .
- d) Pro libovolný bod $X = [x_0, y_0]$ kuželosečky vyjádřete (v \mathbb{R}^2) obsah obdélníku se stranami $\overline{UX}, \overline{VX}$, kde U, V jsou paty kolmic vedených z bodu X na asymptoty.
7. V \mathbb{R}^2 je dána kuželosečka $c : 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$ a bod $P = [-1, -\frac{1}{2}]$.
- a) Převed'te rovnici c do homogenních souřadnic.

- b) Klasifikujte typ kuželosečky (*).
- c) Napište rovnice tečen vedených z bodu P ke kuželosečce c .
- d) Nechtě T_1, T_2 jsou dotykové body tečen vedených z bodu P ke kuželosečce a F je ohnisko kuželosečky c . Ověřte, že PF je výška trojúhelníku PT_1T_2 .
8. V \mathbb{R}^2 je dána kuželosečka $c : 2x^2 + 2y^2 - 12x - 8y + 12 = 0$ a bod $O = [0, 0]$.
- a) Převed'te rovnici c do homogenních souřadnic.
- b) Klasifikujte typ kuželosečky (*).
- c) Napište rovnice tečen vedených z bodu O ke kuželosečce c .
- d) Bodem O ved'te libovolnou sečnu kuželosečky c , která ji protne v bodech A a B . Dokažte, že součin vzdáleností $|OA|$ a $|OB|$ je konstantní a určete jeho hodnotu.
9. V \mathbb{E}^2 je dána kuželosečka $c : 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 16x - 8y - 16 = 0$ a body $O = [0, 0], P = [4, 2]$.
- a) Převed'te rovnici c do homogenních souřadnic v \mathbb{RP}^2 .
- b) Klasifikujte typ kuželosečky (*).
- c) Napište rovnice polár bodů O, P vzhledem ke kuželosečce c a určete jejich průsečík.
- d) Určete průsečíky kuželosečky s osami x a y v \mathbb{E}^2 a ověřte zda tvoří tečnový čtyřúhelník.
10. V \mathbb{E}^2 je dána kuželosečka $c : -7x^2 + 18xy - 7y^2 + 30x - 34y - 23 = 0$ a body $P = [4, 5]$.
- a) Převed'te rovnici c do homogenních souřadnic v \mathbb{RP}^2 .
- b) Klasifikujte typ kuželosečky (*).
- c) Napište rovnice poláry p a tečen t_1, t_2 z bodu P ke kuželosečce c
- d) Napište rovnici združeného průměru k průměru, který prochází bodem $(0,1,0)$.