1) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) dx$

$\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$ na $(0,\infty) \Rightarrow$ integrál ex.

Tahle integrál konverguje $\Leftrightarrow$ konverguje jako Newtonův.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2(x^{-1})}{x^{-2}} \overset{(P)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2(y)}{y^2} = 1$$

LSK
$\Rightarrow$ integrál konverguje

2) $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$, $\varepsilon > 0$ libovolné

Pro $\frac{1}{x} < \pi$ $\left(\Leftrightarrow x > \frac{1}{\pi}\right)$ je $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ kladný.

$\displaystyle\int_{\frac{1}{5}}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ konverguje jako Newtonův.

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \overset{\text{BÚNO } \varepsilon < \frac{1}{5}}{=} \underbrace{\int_{\varepsilon}^{1/5} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx}_{I} + \int_{1/5}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

protože $I \in \mathbb{R}$ [sin je omezený a $(\varepsilon, \frac{1}{5})$ má konečnou míru] a tedy pravá strana má vždy smysl

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \infty \qquad \left(\text{LSK s } \frac{1}{x}\right)$$

(konvergence $\Leftrightarrow$ konv. jako Newtonův)

$$\Rightarrow \int_{\varepsilon}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \infty .$$

$$\int_0^{\infty} \left(\pi - 2\arctg(x)\right)^{\alpha} dx \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\left(\pi - 2\arctg(x)\right)^{\alpha} \geq 0 \Rightarrow$ integrací $\exists$ pro $\forall \alpha$

$$\int_0^{\infty} \left(\pi - 2\arctg(x)\right)^{\alpha} dx = \int_0^{1} \left(\pi - 2\arctg(x)\right)^{\alpha} dx$$

$$+ \int_1^{\infty} \left(\pi - 2\arctg(x)\right)^{\alpha} dx$$

Protože $(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,|x|)^\alpha$ je spojitá na $[0,1]$ $\Rightarrow$ je tam omezená, dále $\lambda([0,1]) < \infty$ a tedy první integrál na pravé straně konverguje, pravá strana má tedy vždy smysl a rovnost platí.

$$\int_1^\infty (\pi - 2\operatorname{arctg}(x))^\alpha \, dx \quad \text{konverguje} \iff$$

konverguje jako Newtonův.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\pi - 2\operatorname{arctg}(x))^\alpha}{x^{-\alpha}} \overset{(P)}{=} \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - 2y)^\alpha}{\operatorname{tg}^{-\alpha}(y)} =$$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - 2y)^\alpha}{\cos^\alpha(y)} \sin^\alpha(y) =$$

$$\overset{AL}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi - 2x}{\cos(x)} \right)^{\alpha} \overset{(S)}{=} 2^{\alpha}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-2}{-\sin(x)} = +2$$

$$\overset{(SL)}{\Longrightarrow} \int_1^{\infty} (\pi - 2\arctg(x))^{\alpha} dx$$ konvergује jako nеkоnačno $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx$ konv $\Leftrightarrow \alpha > 1$

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^\infty \left(\pi - 2\,\mathrm{arctg}(x)\right)^\alpha dx$ konv $\Leftrightarrow$

$\alpha > 1$.

4) $$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\beta}}\,dx \quad , \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\sin(x)}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\beta}} \geq 0 \Rightarrow \text{integrál ex.}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\beta}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\beta}}\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\beta}}\,dx$$

protože funkce je kladná a tedy pravá strana dává smysl.

Opět se převedou integrály na Newtonovy a použije se LSd a $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

Dostane $1 - \alpha > -1$, $1 - \beta > -1 \Rightarrow \alpha, \beta < 2$.

$$\left[\text{Hint: } \sin(\pi/2 - t) = \sin(\pi/2 + t)\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^\alpha}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^\alpha} \geq 0 \Rightarrow$$ integrál ex. a platí

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^\alpha}\,dx + \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^\alpha}\,dx$$

Oba integrály konvergují $\Leftrightarrow$ konv. jako Newtonovy.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)\, x^{-\alpha}}{x^{1-\alpha}} = 1 \overset{LSK}{\Longrightarrow} \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^\alpha}\,dx < \infty$$

$$\Leftrightarrow \alpha < 2$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)\, x^{-\alpha}}{x^{-\alpha}} = \frac{\pi}{2} \overset{LSK}{\Longrightarrow} \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^\alpha}\,dx < \infty$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 1$$

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x^\alpha}\,dx < \infty \iff \alpha \in (1, 2).$$

$$\int_{-1}^{1} \overbrace{\cos\left(\sin\left(\frac{1}{g(x)}\right)+\exp\left(\frac{1}{h(x)}\right)\right)}^{f(x)} dx, \quad \alpha, \beta > 0$$

$$\boxed{g(x) = \operatorname{sign}(x)\,|x|^{\alpha}, \quad h(x) = \operatorname{sign}(x)\,|x|^{\beta}}$$

funkce je omezená, $\lambda([-1,1]) < \infty$

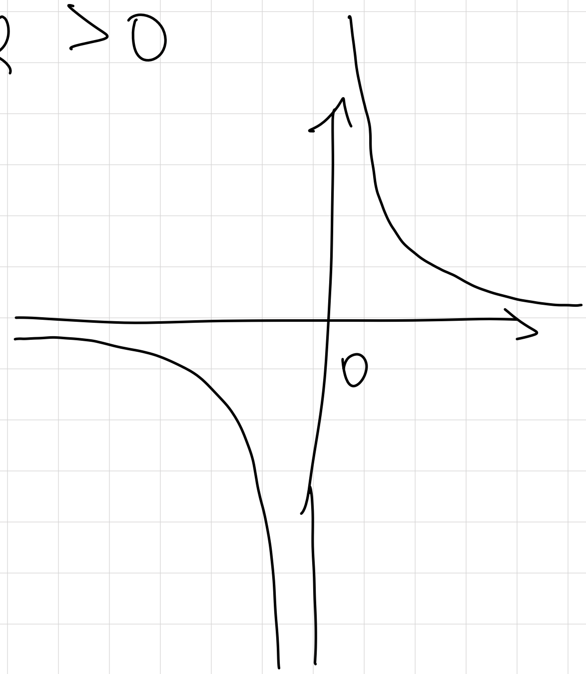
$\Longrightarrow$ integrál konverguje.

Funkce je měřitelná, protože

$f_1 = f \cdot \chi_{[-1,0)}$ je měř. a $f_2 = f \cdot \chi_{(0,1]}$ je

měř. a $f = f_1 + f_2$

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{\operatorname{sgn}(x) \frac{1}{|x|^\alpha}}_{f(x)} \, dx \, , \quad \alpha > 0$$



$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = - \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ Ponad $\int_0^1 f(x)\,dx$ konvergují |

pak $\int_0^1 f(x)\,dx + \int_{-1}^0 f(x)\,dx = 0$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_{-1}^0 f(x)\,dx$$

$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)\,dx$ konverguje

Pokud $\int_0^1 f(x)\,dx = \infty$ $\left[f \geq 0 \text{ na } (0,1] \right]$

pak protože $f(x) \leq 0$ na $[-1, 0)$ a ≥ 0 na $(0,1]$

dostáváme, že integrál kladné části je $+\infty$,

integrál záporné části též a tedy

$\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ neexistuje.

$$\int_0^1 f(x)\,dx < \infty \iff \text{konv. jako Newtonův} \iff$$

$$\iff \quad \alpha < 1$$

Závěr: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ konverguje pro $\alpha < 1$, neexistuje pro $\alpha \geq 1$.