4.4. Taylorův polynom

Motivace: Chceme nahradit komplikovanou funkci polynomem s co největší přesností. Lze aplikovat například při integrování, řešení diferenciálních rovnic. Používá se i v informatice při reprezentaci funkce na kalkulačce.

Příklady:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$\boxed{\text{Definice}}$ Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní n-tá derivace f v bodě a. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + f''(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2} + \dots + f^{(n)}(a)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}$$

nazýváme Taylorovým polynomem ~~funkce~~ řádu n funkce f v bodě a.

Poznámky: a) $\mathrm{st}\,(T_n^{f,a}(x)) \le n$.

b) $$\left(T_n^{f,a}(x)\right)' = 0 + f'(a)\cdot 1 + f''(a)\cdot(x-a) + \dots + f^{(n)}(a)\cdot\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} = T_{n-1}^{f',a}(x)$$

$\boxed{\text{Věta T 4.18}}$ (o nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem) $\boxed{24-2}$

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n.

Pak $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \iff P(x) = T_n^{f,a}(x)$.

Dk: "$\Leftarrow$" MI $n = 1$: $T_1^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$

Chceme $0 = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{(x-a)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)\cdot(x-a)}{x-a}$

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0$

podle definice derivace

$n-1 \leadsto n$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x) - (T_n^{f,a}(x))'}{n\cdot(x-a)^{n-1}} =$

$T_n^{f,a}(a) = f(a)$

l'Hospital

Poznámka

$= \cancel{\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n\cdot(x-a)^{n-1}}}$ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n\cdot(x-a)^{n-1}} = 0$

podle indukčního předpokladu pro funkci f' pro $n-1$.

~~Lemma~~ **Lemma** Nechť Q je polynom, $a \in \mathbb{R}$, $\operatorname{st} Q \leq n$ a $\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak $Q \equiv 0$.

Důkaz: MI: $n = 1$

$$\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{x-a} = 0 \Rightarrow Q(a) = 0 \overset{\operatorname{st} Q = 1}{\Longrightarrow} Q(x) = c \cdot (x-a)$$

Nyní $0 = \lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{c \cdot (x-a)}{x-a} = c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow Q \equiv 0$

$n-1 \rightsquigarrow n$

$$\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0 \Rightarrow Q(a) = 0 \Rightarrow Q(x) = (x-a) \cdot R(x), \text{ kde } \operatorname{st} R \leq n-1$$

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a) \cdot R(x)}{(x-a)^n} = \underline{\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}}}$$

$=$

Z indukčního předpokladu pro polynom R, $\operatorname{st} R \leq n-1$, dostáváme $R \equiv 0 \Rightarrow Q \equiv 0$ $\square$

"$\Rightarrow$" $\lim_{x \to a} \frac{P(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \overset{\triangle}{\leq} \lim_{x \to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$

$\lim_{x \to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} = 0$ podle předpokladu

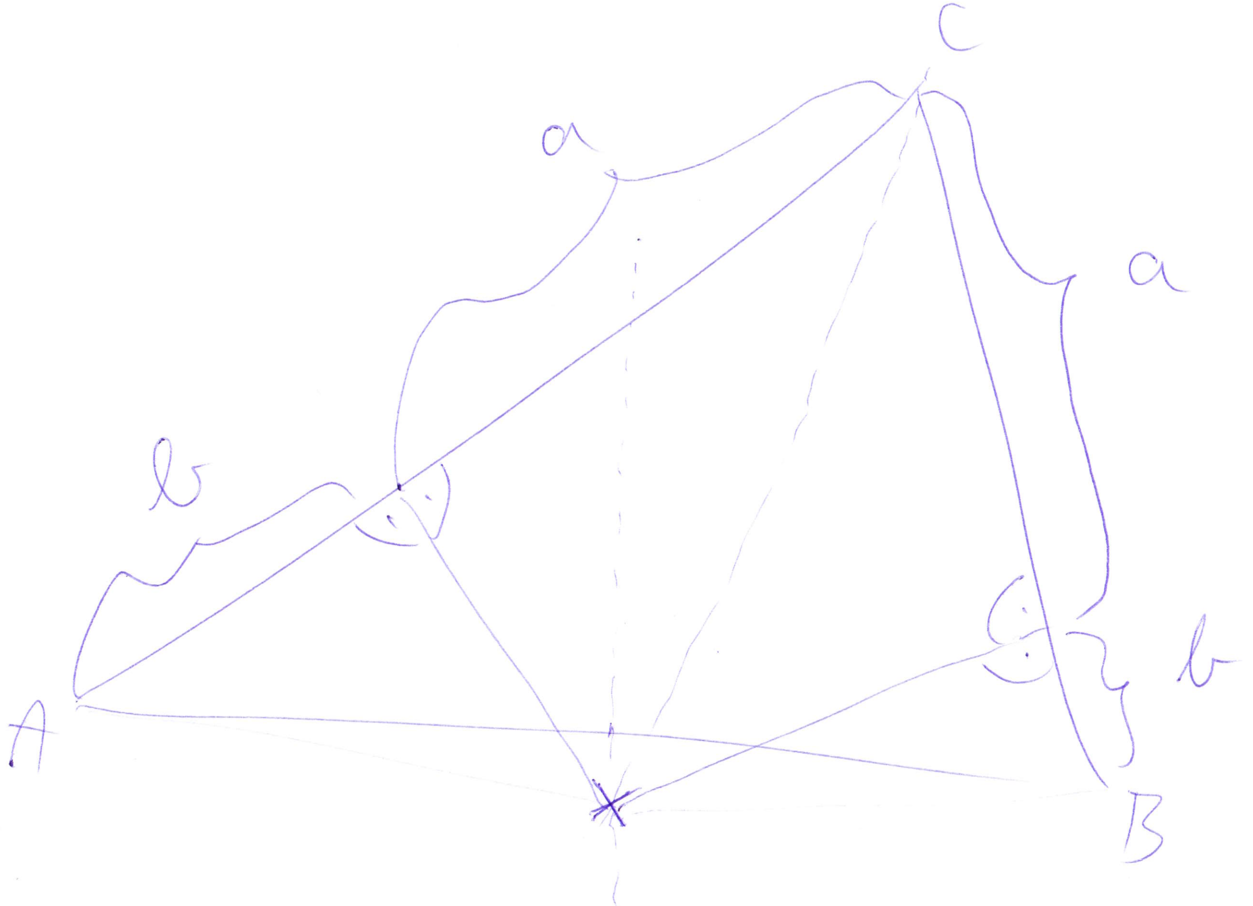
$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$ podle "$\Leftarrow$"

$\operatorname{st}(P - T_n^{f,a}) \leq n \overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} P - T_n^{f,a} \equiv 0$

$\square$

Tvrzení: Každý Δ je rovnoramenný.

Dk:



$a+b = a+b$

⌊⌋

Věta T4.19 (Taylor) Nechť má funkce f vlastní $(n+1)$-ní derivaci v intervalu $[a,x]$ a nechť φ je spojitá funkce v $[a,x]$ a má vlastní derivaci v (a,x), která je v každém bodě tohoto intervalu nenulová.
Pak existuje $\xi \in (a,x)$ tak, že
$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-\xi)^n .$$

~~Def~~ Poznámka: $R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme zbytek po Taylorově polynomu stupně n.

Důsledek: (Lagrangeův tvar zbytku)
Speciálně existuje $\xi_1 \in (a,x)$ tak, že
$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi_1)\cdot(x-a)^{n+1} .$$

Dk: Položme $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, pak $\varphi'(t) = (n+1)(x-t)^n\cdot(-1)$
$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{0-(x-a)^{n+1}}{-(n+1)\cdot\cancel{(x-\xi_1)^n}} \cdot f^{(n+1)}(\xi_1)\cdot\cancel{(x-\xi_1)^n}$$

Důsledek: (Cauchyův tvar zbytku) Speciálně existuje $\xi_2 \in (a,x)$, že
$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi_2)\cdot(x-\xi_2)^n\cdot(x-a) .$$

Dk: Položme $\varphi(t) = t$.

Příklad: spočtěte $e^{0,1}$ s chybou $< 10^{-5}$.

$$T_n^{e^x,0}(x) = f(0) + f'(0)\cdot(x-0) + f''(0)\cdot\frac{(x-0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\cdot\frac{(x-0)^n}{n!} =$$

$$= \underbrace{1 + x + 1\cdot\frac{x^2}{2!} + \dots}_{} + \frac{x^n}{n!}$$

$$\left|e^x - T_n^{f,0}(x)\right| = \frac{1}{(n+1)!}\cdot e^{\xi_1}\cdot x^{n+1} \qquad \xi_1 \in (0;\, 0,1)$$

$$\left|e^{0,1} - T_n^{e^x,0}(0,1)\right| \le \frac{1}{(n+1)!}\cdot e^{0,1}\cdot (0,1)^{n+1} < 10^{-5}$$

$$n = 3 \qquad \frac{1}{4!}\cdot e^{0,1}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4 < 10^{-5} \quad \checkmark$$

Tedy $\quad e^{0,1} \doteq T_3^{e^x,0}(0,1) = \underline{1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2!} + \frac{(0,1)^3}{3!}}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n}, \qquad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\cdot x^n \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}$$