Spočtěte $\int_M f \, d\lambda^2$ kde $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

a) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \le y \le x\sqrt{3}\}$

M je uz $\Rightarrow$ M je měř.

f je spoj. $\Rightarrow$ f je měř.

$f \ge 0$.

Použijeme polární souřadnice.

$$(*) \qquad x = r\cos(\alpha)$$
$$y = r\sin(\alpha)$$

$r\cos(\alpha) \le r\sin(\alpha) \le \sqrt{3}\, r\cos(\alpha)$

$\Rightarrow 1 \le tg(\alpha) \le \sqrt{3}$

(BÚNO $\cos(\alpha) \ge 0$, jinak neexistuje řešení)

$$\varphi : (0,\infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$$
$$|J\varphi(r,\alpha)| = r$$

$$\varphi^{-1}(M) = \{(r,\alpha) \in (0,\infty) \times (-\pi, \pi);\ r \in [1,2],\ \alpha \in (\underbrace{\operatorname{arctg}(1)}_{=\pi/4}, \underbrace{\operatorname{arctg}(\sqrt{3})}_{=\pi/3})\}$$

φ splňuje předpoklady V. o substituci.

Fubini, integrand ≥ 0

$$\int_{\Pi} f \, d\lambda^2 \overset{(*)}{=} \int_{\varphi^{-1}(\Pi)} r^2 \, d\lambda^2(r, \alpha) =$$

$$= \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} r^2 \, d\alpha \, dr = \frac{\pi}{12} \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{12} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7\pi}{36}.$$