

NMAI059 Pravděpodobnost a statistika 1

10. přednáška

Robert Šámal

Přehled

Intervalové odhady

Testování hypotéz

Intervalové odhady normální náhodné veličiny

Věta

X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z $N(\vartheta, \sigma^2)$.

σ známe, ϑ chceme určit, $\alpha \in (0, 1)$.

Nechť $\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$. $\hat{\Theta}_n = \bar{X}_n$.

$$C_n := [\hat{\Theta}_n - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \hat{\Theta}_n + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}]$$

Pak $P(C_n \ni \vartheta) = 1 - \alpha$.

Důkaz.



Intervalové odhady pomocí CLV

Věta

X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou ϑ , rozptylem σ^2 .

σ známe, ϑ chceme určit, $\alpha \in (0, 1)$.

Nechť $\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

$$C_n := [\hat{\Theta}_n - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \hat{\Theta}_n + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}]$$

Pak $P(C_n \ni \vartheta)$ se limitně blíží $1 - \alpha$.

Studentovo rozdělení

- ▶ $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \dots$ výběrový průměr
- ▶ $\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \dots$ výběrový rozptyl

▶ Necht' $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

▶ Pak $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

▶ *Studentovo t-rozdělení s $n - 1$ stupni volnosti je rozdělení n.v.*

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{S}_n/\sqrt{n}}$$

▶ Distribuční funkce Ψ_{n-1} (v tabulkách ...)

Int. odhady normální n.v. pomocí Studentova t

Věta

X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z $N(\vartheta, \sigma^2)$.

ϑ chceme určit, σ neznáme; $\alpha \in (0, 1)$. Necht'

$$\Psi_{n-1}(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2. \hat{\Theta}_n = \bar{X}_n, \hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

$$C_n := \left[\hat{\Theta}_n - z_{\alpha/2} \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}, \hat{\Theta}_n + z_{\alpha/2} \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}} \right]$$

Pak $P(C_n \ni \vartheta) = 1 - \alpha$.

Přehled

Intervalové odhady

Testování hypotéz

Úvod do testování hypotéz

- ▶ Je naše mince spravedlivá?
 - ▶ Je naše kostka spravedlivá?
 - ▶ Má vylepšený program kratší dobu běhu než původní?
 - ▶ Je léčba nemoci metodou X dobrá? (Lepší než placebo, lepší než metoda Y, ...)
 - ▶ Jsou leváci lepší boxeři?
-
- ▶ dvě hypotézy: H_0 , H_1
 - ▶ H_0 – nulová hypotéza (*null hypothesis*) – značí defaultní, konzervativní model (léčba, mince je spravedlivá)
 - ▶ H_1 – alternativní hypotéza (*alternative hypothesis*) – značí alternativní model „zajímavost“

Testování hypotéz – ilustrace

- ▶ Chceme testovat, zda je mince spravedlivá.
- ▶ Hodíme n -krát mincí, orel padne S -krát.
- ▶ Pokud je $|S - n/2|$ moc velké, tak mince není spravedlivá.

Testování hypotéz – ilustrace

- ▶ Chceme testovat, zda je mince spravedlivá.
- ▶ H_0 : je spravedlivá
- ▶ H_1 : není spravedlivá („Vědci objevili, že v kasinu byla použita falešná mince.“)
- ▶ Výsledky: zamítneme H_0 /nezamítneme H_0
- ▶ Chyba 1. druhu: chybné zamítnutí. Zamítneme H_0 , i když platí. Trapas.
- ▶ Chyba 2. druhu: chybné přijetí. Nezamítneme H_0 , ale ona neplatí. Promarněná příležitost.
- ▶ Potřebujeme určit k takové, že budeme zamítat H_0 pokud $|S - n/2| > k$.

Testování hypotéz – obecný postup

- ▶ Vybereme vhodný statistický model.
- ▶ Volíme *hladinu významnosti (significance level)* α : pravd. chybného zamítnutí H_0 . Typicky $\alpha = 0.05$.
- ▶ Určíme *testovou statistiku* $S = h(X_1, \dots, X_n)$, kterou budeme určovat z naměřených dat.
- ▶ Určíme *kritický obor (rejection region)* – množinu W .
- ▶ Naměříme hodnoty x_1, \dots, x_n náh. veličin X_1, \dots, X_n .
- ▶ Rozhodovací pravidlo: zamítneme H_0 pokud $h(x_1, \dots, x_n) \in W$.
- ▶ $\alpha = P(h(X) \in W; H_0)$
- ▶ $\beta = P(h(X) \notin W; H_1) \dots$ *síla testu*
- ▶ často α nevolíme předem, ale spočítáme p -hodnotu: minimální α , pro které bychom H_0 zamítlí.

Testování hypotéz – příklad

- ▶ X_1, \dots, X_n náhodný výběr z $N(\vartheta, \sigma^2)$
- ▶ σ^2 známe
- ▶ $H_0 : \vartheta = 0$ $H_1 : \vartheta \neq 0$

Testování hypotéz – příklad

- ▶ X_1, \dots, X_{n_1} náhodný výběr z $Ber(\vartheta_X)$
- ▶ Y_1, \dots, Y_{n_2} náhodný výběr z $Ber(\vartheta_Y)$
- ▶ $H_0 : \vartheta_X = \vartheta_Y$ $H_1 : \vartheta_X \neq \vartheta_Y$

p-hacking

- ▶ napřed získáme data, pak v nich hledáme zajímavosti
- ▶ když máme dost dat, tak tam nějaké budou „shodou okolností“
- ▶ *reprodukovatelnost* – po explorační analýze dat uděláme nezávislý sběr dat a ten analyzujeme konfirmačně
- ▶ nebo dopředu náhodně rozdělíme data na část pro tvorbu hypotéz a část pro jejich potvrzení . . . jednoduchý případ křížové validace (cross validation)

Letters in winning word of Scripps National Spelling Bee

correlates with

Number of people killed by venomous spiders

