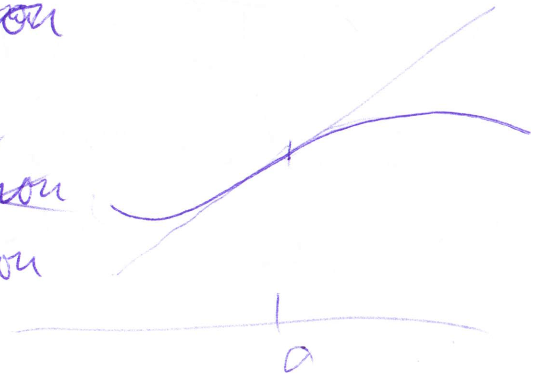
23-1

Def f má v a inflexi, $\exists f'(a) \in \mathbb{R}$ $\exists \Delta > 0$

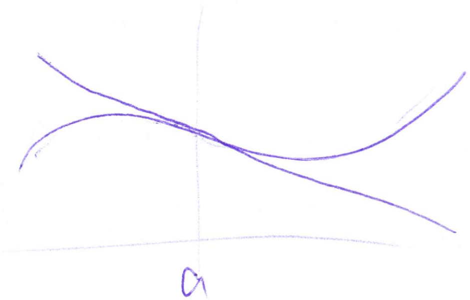
(i) $\forall x \in (a-\Delta, a)$: $[x, f(x)]$ leží nad tečnou

$(f(x) > f(a) + f'(a)\cdot(x-a))$

(ii) $\forall x \in (a, a+\Delta)$: $[x, f(x)]$ leží pod ~~sečnou~~ tečnou



nebo naopak

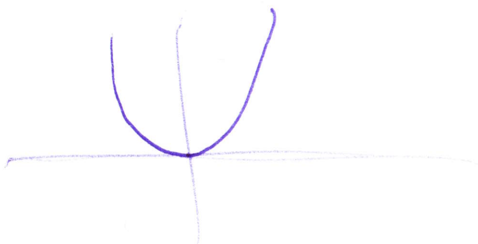


Věta 4.7 (Lagrange) f spojitá na $[a,b]$, $\exists f'$ na (a,b)

Pak $\exists \xi \in (a,b)$ $\quad f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

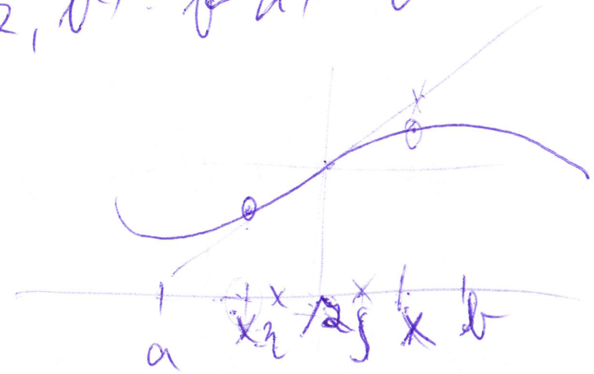
Věta $f''(a) \neq 0$. Pak a není inflexní bod.

Př: x^4 v 0



Věta T 4.16 (postačující podmínka pro inflexi)

Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a,b).
Nechť $z \in (a,b)$ a platí
$$\forall x \in (a,z): f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (z,b): f''(x) < 0.$$
Pak z je inflexní bod.



Dk: Podle V 4.8 (derivace a monotonie) víme, že f' klesá na $[z,b)$.

Podle V 4.7 (Lagrange o střední hodnotě) pro $x \in [z,b)$ nalezneme
$$\xi \in (z,x): \quad \frac{f(x)-f(z)}{x-z} = f'(\xi). \qquad /\cdot(x-z)$$
Odtud
$$f(x) = f(z) + f'(\xi)\cdot(x-z) < f(z) + f'(z)\cdot(x-z)$$
$\xi > z$ a f' klesá na $[z,b)$

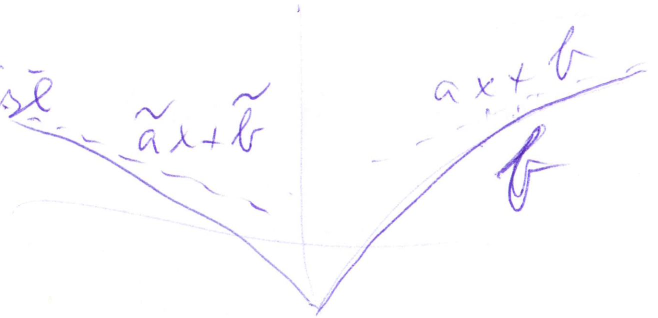
Analogicky f' roste na $(a,z]$.
Pro $x \in (a,z]$ $\exists\, \eta \in (x,z)$: $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(\eta)$. $/\cdot(z-x)$
$$f(x) = f(z) + f'(\eta)\cdot\underbrace{(x-z)}_{<0} > f(z) + f'(z)\cdot(x-z).$$
$\eta < z$ a f' roste na $(a,z]$

$\square$

Pozn: Analogicky pro $f'' < 0$ na (a,z) a $f'' > 0$ na (z,b).

4.3. Průběh funkce

Def Řekneme, že funkce $ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, je asymptota funkce f v $+\infty$ (resp. $-\infty$) jestliže



$\cancel{\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b}$ $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

(resp. $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$)

$\boxed{\text{Věta L4.7}}$ (tvar asymptoty). ~~Nechť~~ ~~Mějme~~ Funkce f v $+\infty$ ~~asyp~~ asymptotu $ax+b$ $\iff$ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ a $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$.

Poznámka: Věta platí analogicky i pro $-\infty$.

Dk: "$\Rightarrow$" $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{x} = \frac{0}{\infty}+a=a$

$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax) \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty} f(x)-(ax+b) + \lim_{x\to\infty} b = 0+b$

"$\Leftarrow$" $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)] \overset{?}{=} \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax) + \lim_{x\to\infty}(-b) =$

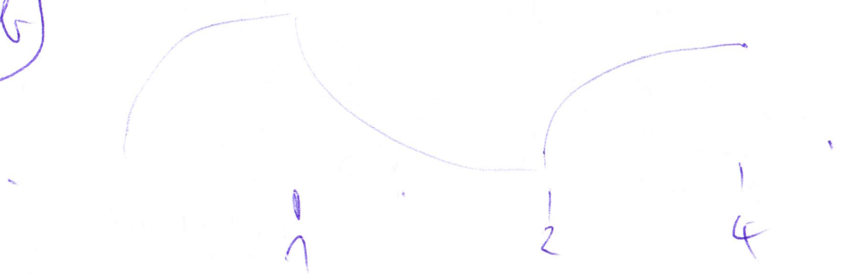
$= b+(-b)=0$

$\blacksquare$

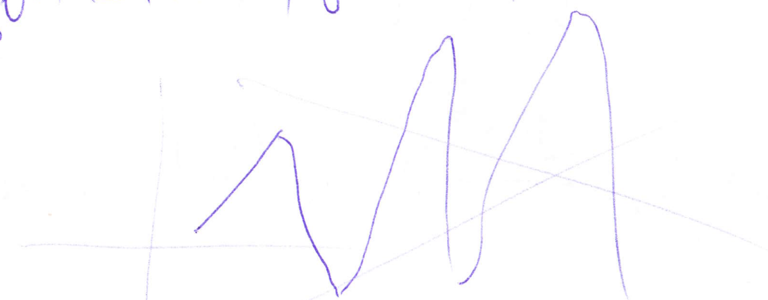
Při vyšetřování průběhu funkce provádíme následující kroky: 123-4

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce
2. Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.
3. Zjistíme symetrii funkce: lichost, sudost, periodicitu.
4. Dopočítáme limity v krajních bodech definičního oboru.
5. Spočteme první derivaci (i jednostranné v problematických bodech), určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy.
6. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je f konvexní nebo konkávní, určíme inflexní body.
7. Vypočteme asymptoty funkce.
8. Načrtneme graf funkce a určíme obor hodnot.

3-4b



$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$, f klesá na $(0, +\infty)$



$f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$, $D_f = \mathbb{R}$, spojitá na $\mathbb{R}$ 23-5

průsečíky: $[0,0]$ $f(x)=0 \iff \sqrt[3]{(x+2)^2} = \sqrt[3]{(x-2)^2} \iff \cancel{x^2}+4x+\cancel{4} = \cancel{x^2}-4x+\cancel{4} \iff x=0$

$f(-x) = \sqrt[3]{(-x+2)^2} - \sqrt[3]{(-x-2)^2} = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2} = -f(x)$ funkce je lichá

není periodické

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2} + \left(\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)^2}{}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+4x+\cancel{4}-(\cancel{x^2}-4x+\cancel{4})}{\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)^2 + \dots +} \cdot \frac{\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}}{\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}} = \cancel{\sim \frac{x}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2} = \frac{x}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \to 0}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8}{\sqrt[3]{x}}}{\left(\sqrt[3]{(1+\frac{2}{x})^2}\right)^2 + \sqrt[3]{(1+\frac{2}{x})^2}\cdot\sqrt[3]{(1-\frac{2}{x})^2} + \left(\sqrt[3]{(1-\frac{2}{x})^2}\right)^2} = \frac{0}{3} = 0$$

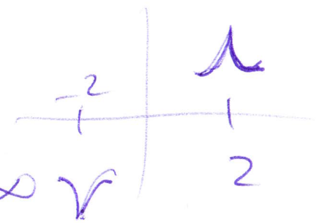
z lichosti $\lim_{x\to-\infty} = 0$.

$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot(x+2)^{\frac{2}{3}-1} - \frac{2}{3}\cdot(x-2)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2+} \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = -\infty$$

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2-} \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = +\infty$$



$f'_+(-2) = +\infty$

$f'_-(-2) = -\infty$

z lichosti

$$f' = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} > 0 \iff \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \iff \frac{1}{x+2} > \frac{1}{x-2}$$ 23-6

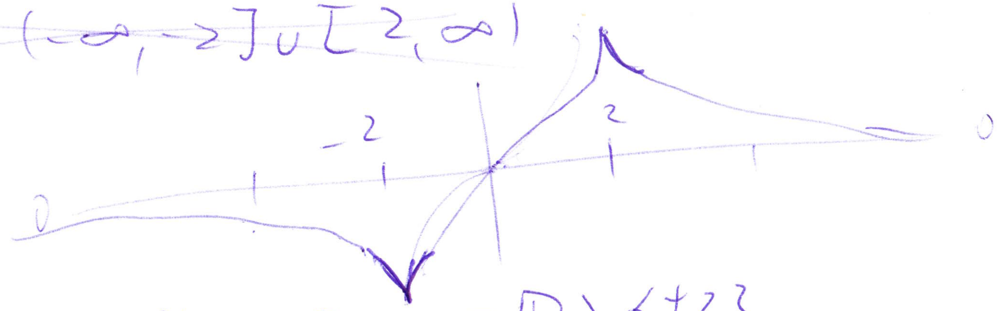
$f' > 0$ na $(-2,2)$, $f' < 0$ na $(2,\infty)$, $f' < 0$ na $(-\infty,-2)$

f roste na $[-2,2]$, f klesá na $[2,\infty)$ a f klesá na $(-\infty,-2]$

~~f klesá na $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$~~

f má globální maximum v 2

f má globální minimum v -2.



$$f'' = -\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^4}} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}} \cancel{> 0}$$ $D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

$$f'' > 0 \iff \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}} > \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^4}} \iff \frac{1}{(x-2)^4} > \frac{1}{(x+2)^4} \iff (x+2)^4 > (x-2)^4$$

$$\iff 16x\cdot(x^2+4) > 0$$

f je konvexní na $(0,2)$ a je konvexní na $(2,\infty)$

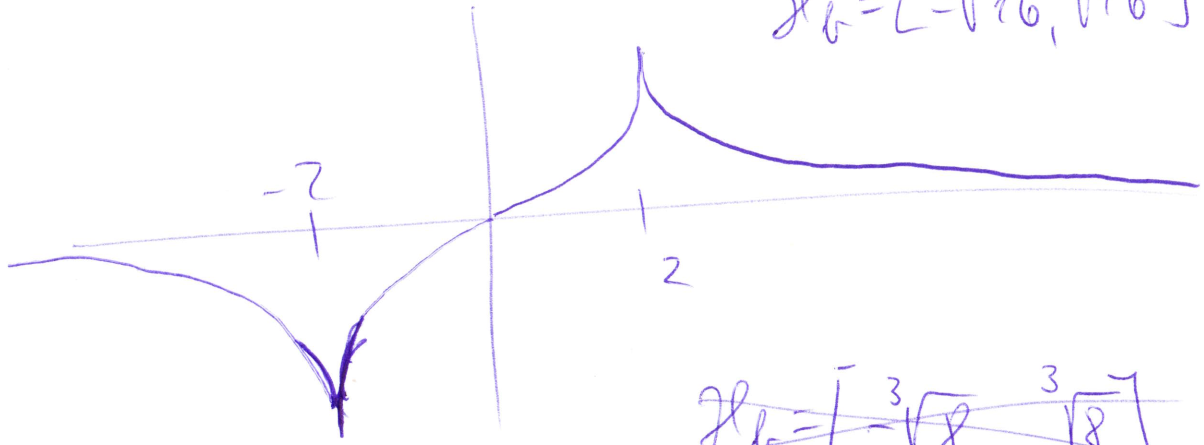
f je konkávní na $(-2,0)$ a je konkávní na $(-\infty,-2)$

f má v 0 inflexní bod.

v ∞ je asymptota 0

v $-\infty$ je asymptota 0

$H_f = [-\sqrt[3]{16}, \sqrt[3]{16}]$



~~$H_f = [-\sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{8}]$~~