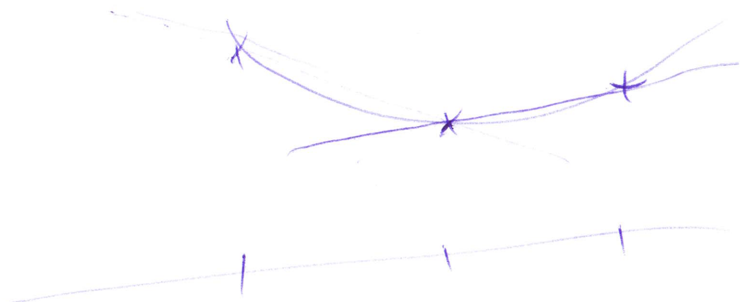
22-1

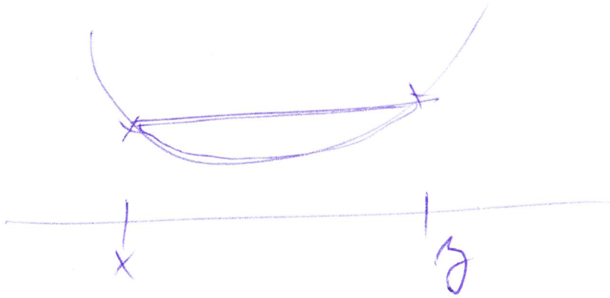
Def Funkci f na intervalu I nazveme konvexní, jestliže

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$



$$\forall x, y \in I \quad \forall \alpha \in (0,1)$$

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha)\cdot f(y)$$



V4.7 (Lagrange o střední hodnotě)

f spojitá na $[a,b]$, $\exists f'$ na (a,b). Pak

$$\exists \xi \in (a,b) \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Věta L4.12 (vztah druhé derivace a konvexity (konkávity))

Nechť f má na intervalu (a,b) spojitou první derivaci.

Jestliže $\forall x \in (a,b): f''(x) > 0$, pak f je ryze ~~konv~~ konvexní.

Jestliže $\forall x \in (a,b): f''(x) < 0$, pak f je ryze konkávní.

Jestliže $\forall x \in (a,b): f''(x) \geq 0$, pak f je konvexní.

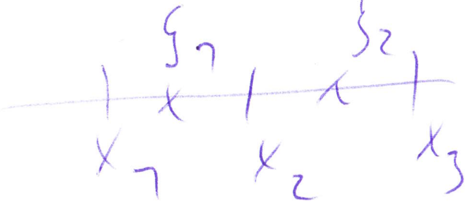
Jestliže $\forall x \in (a,b): f''(x) \leq 0$, pak f je konkávní.

Dk: Jen ~~prom~~ třetí část, zbytek analogicky.

Víme $\forall x \in (a,b)\ f''(x) \geq 0 \overset{V4.8.}{\Longrightarrow} f'$ je neklesající na (a,b)

Zvolme $x_1 < x_2 < x_3$, $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$.

Podle V4.7. (Lagrange) $\exists\ \xi_1, \xi_2$



$\exists\ \xi_1 \in (x_1, x_2): \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1)$

$\exists\ \xi_2 \in (x_2, x_3): \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2)$

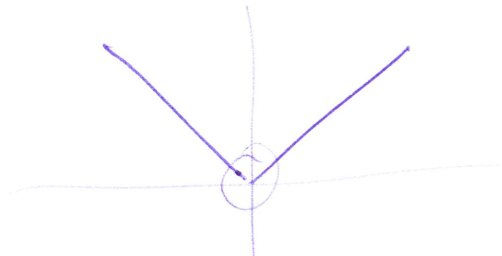
$$\xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{f' \text{ je neklesající}} f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \qquad \square$$

$$\boxed{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}}$$

Věta T 4.13 (konvexita a jednostranné derivace)

Nechť f je konvexní na otevřeném J a $a \in \operatorname{int} J$.
Pak $f'_+(a) \in \mathbb{R}$ a $f'_-(a) \in \mathbb{R}$.

Příklad: $f(x) = |x|$ je konvexní na $[-1, 1]$



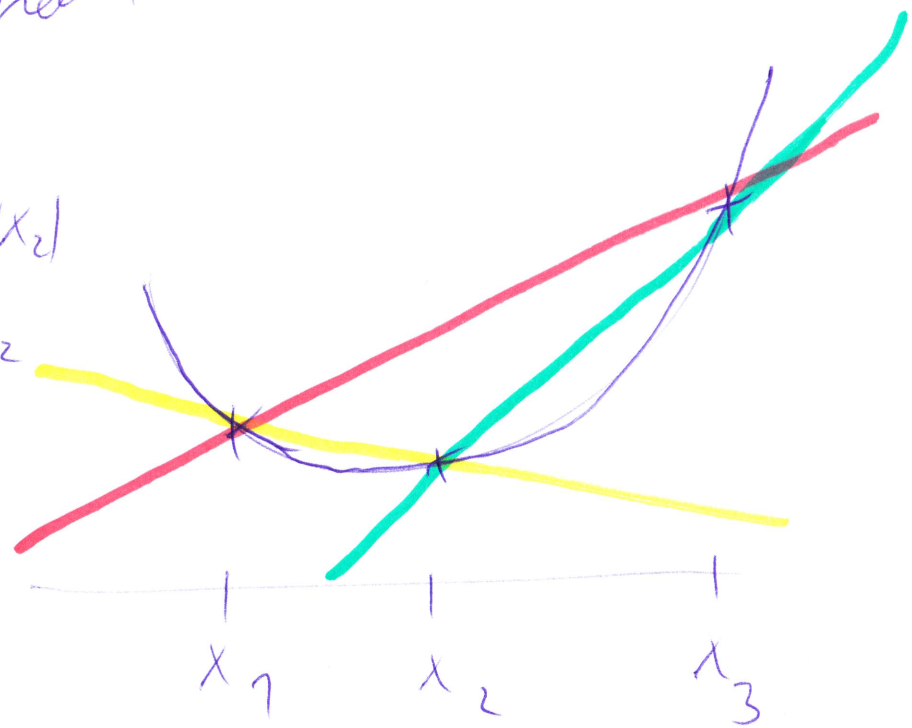
$f'_+(0) = 1 \quad f'_-(0) = -1$

ale neexistuje $f'(0)$.

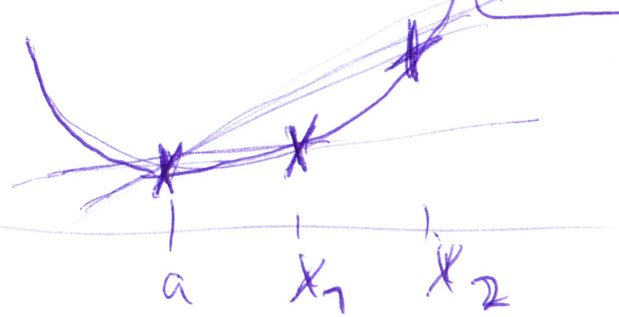
Lemma f konvexní na intervalu I, pak

$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$



Dk: Z definice $f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.



Nechť $a < x_1 < x_2$.

Z lemmatu víme, že

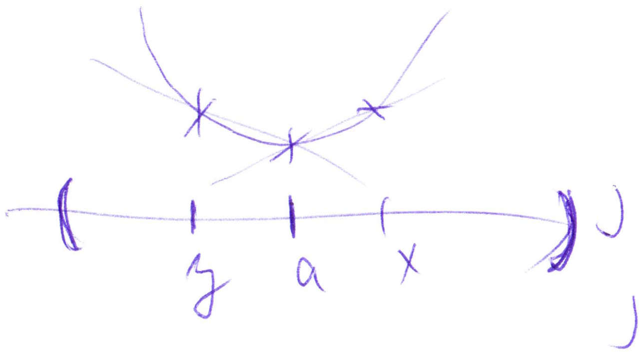
$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} \le \frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}$$

Tedy funkce $x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ je neklesající.

Podle V3.7 (limita monotónní funkce) tedy $\exists \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}^*$

Zvolme $y \in J$, $y < a$, y pevné.

Nyní $\forall x \in J$, $x > a$, platí



$$\frac{f(a)-f(y)}{a-y} \le \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Tedy $x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ je zdola omezená (na jistém $P^+(a,\delta)$)

$$\Rightarrow f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$$

$\square$

Věta L 4.14 (konvexita a spojitost)

Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J.

Pak f je spojitá na J.

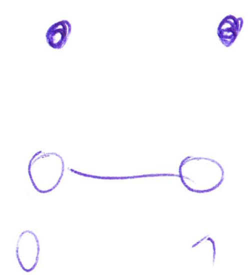
Dk: $a \in J \Rightarrow a \in \operatorname{int} J \overset{V4.13}{\Rightarrow} \exists f'_+(a) \in \mathbb{R},\ \exists f'_-(a) \in \mathbb{R}$

$\exists f'_+(a) \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ je v a spojitá zprava (analogie V4.1. pro jednostranné limity)

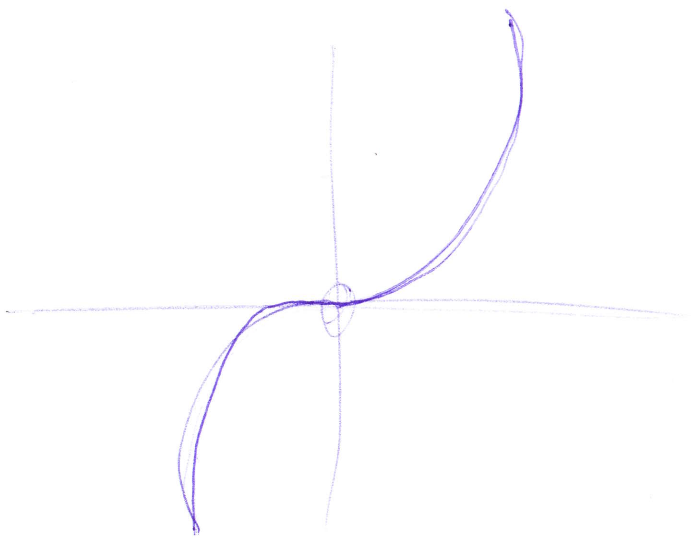
$\exists f'_-(a) \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ je v a spojitá zleva

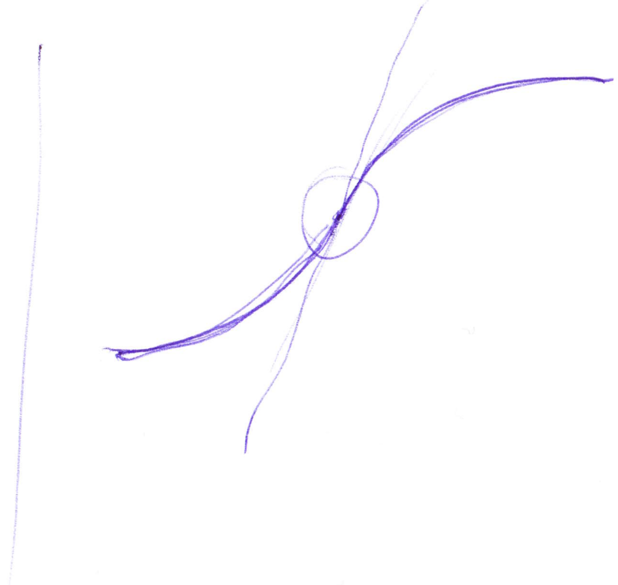
} f je v a spojitá $\square$

Příklad:



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \in (0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$ je konvexní





$\boxed{\text{Definice}}$ Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$

Označme $T_a^f = \{ [x,y] : x \in \mathbb{R},\ y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) \}$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$, $x \in D_f$ leží nad (pod) tečnou T_a^f

jestliže platí $f(x) > f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$

$\quad (f(x) < f(a) + f'(a)\cdot(x-a))$

$\boxed{\text{Definice}}$ Funkce f má v bodě a inflexi (a je inflexní bod), jestliže $f'(a) \in \mathbb{R}$ a existuje $\Delta > 0$ tak, že

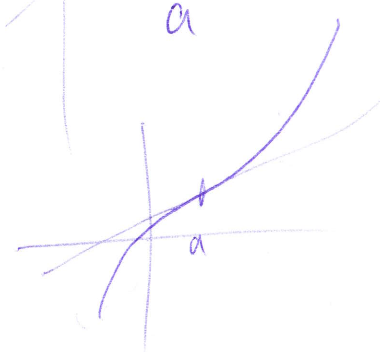
(i) $\forall x \in (a-\Delta, a)$: $[x, f(x)]$ leží nad tečnou

(ii) $\forall x \in (a, a+\Delta)$: $[x, f(x)]$ leží pod tečnou

nebo

(i) $\forall x \in (a-\Delta, a)$: $[x, f(x)]$ leží pod tečnou

(ii) $\forall x \in (a, a+\Delta)$: $[x, f(x)]$ leží nad tečnou.



Věta T 4.15 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $f''(a) \neq 0$. Pak a není inflexní bod funkce f.

Dk. BÚNO $f''(a) > 0$, tedy $f''(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0$.

Standardním způsobem odvodíme $\exists \Delta > 0 \ \forall h \in P(0, \Delta)$ $\dfrac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0$

$\forall x \in (a, a+\Delta):$ $f'(x) > f'(a)$

$\forall x \in (a-\Delta, a):$ $f'(x) < f'(a)$.

Pro $y \in (a, a+\Delta)$ platí podle Lagrangeovy věty 4.7.

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(\xi) > f'(a) \qquad \xi \in (a, y) \subset (a, a+\Delta)$$

Odtud $f(y) - f(a) > f'(a) \cdot (y - a) \Rightarrow f(y) > f(a) + f'(a) \cdot (y - a)$

Analogicky pro $y \in (a-\Delta, a)$ platí

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(\xi) < f'(a) \qquad / \cdot \overbrace{(y-a)}^{<0} \qquad \xi \in (y, a) \subset (a-\Delta, a)$$

Odtud $f(y) > f(a) + f'(a) \cdot (y - a)$ $\Rightarrow$ v a není inflexe $\square$

Příklad: $f(x) = x^4$ v 0 $\quad f''(0) = 0$,
ale v 0 není inflexe