## Násobenie matíc:

A typu $m \times n$ $\qquad A^T = (\overset{n\times 1}{a_1} | a_2 | \dots | a_m)$

B typu $n \times p$ $\qquad B = (\underset{n\times 1}{b_1} | \dots | b_p)$

$$AB = (Ab_1 | Ab_2 | \dots | Ab_p) = (a_1^T B \,|\, a_2^T B \,|\, \dots \,|\, a_m^T B)^T$$

stĺpce AB sú LK stĺpcov A $\qquad$ riadky AB sú LK riadkov B

---

G(D) generujúca → riadky tvoria bázu $\mathcal{C}$, koef. realizovateľné

G(D) generujúca je minimálna: $\dim \Sigma_{\mathcal{C}} = \dim \Sigma_G$

$\iff K(Z(u)G) \in \mathcal{C} \iff K(Z(u)G) = 0$

expanduje vzor $\iff \forall u:\ \deg u \le \deg uG;\ \operatorname{del} u \ge \operatorname{del} uG$

$\iff$ má pol. pravý inverz v $D$ aj $D^{-1}$

Smithova normálna forma (SNF) $\overset{b\times c}{G}$ je $\Gamma$ t.ž.

- $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & & 0 & \vdots \\ & \gamma_2 & & & & \\ 0 & & \gamma_3 & & & 0 \\ & & & 0 & & \vdots \end{pmatrix}$ typu $b \times c$
- $\gamma_i \mid \gamma_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, r-1$
- $G = A \cdot \Gamma \cdot B$, $A, B$ unimodulárne – polynomiálne, inverz nad $\mathbb{F}[D]$

**Príklad:** Spočítajte SNF a rozklad $(A, B)$ matice $G$

$$G = \begin{pmatrix} 1+D & D & 1 \\ D^2 & 1 & 1+D+D^2 \end{pmatrix}.$$

$G = A \cdot \Gamma \cdot B$

$$\underbrace{E_k \cdots E_3 E_2 E_1}_{\text{ERÚ}} G \underbrace{F_1 F_2 \cdots F_l}_{\text{el. stĺpcové úpravy}} = \Gamma \qquad (A \mid I) \sim \dots \sim (I \mid A^{-1})$$

$$G = \underbrace{E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}}_{A} \Gamma \underbrace{F_l^{-1} \cdots F_1^{-1}}_{B}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} G & I \\ \hline I & \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{c|c} \Gamma = A^{-1} G B^{-1} & B^{-1} \\ \hline A^{-1} & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1+D & D & 1 & 1 & 0 \\ D^2 & 1 & 1+D+D^2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1+D & D & 1 \\ 1+D^2+D^3 & 1+D+D^2+D^3 & 0 \\ D+D^2 & 1+D+D^2 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$D \quad 1+D$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & D & 1+D & 1 & 0 \\ 1+D+D^2 & 1 & D^2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1 & D & 1+D \\ 0 & 1+D+D^2+D^3 & 1+D^2+D^3 \\ 0 & 1+D+D^2 & D+D^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+D+D^2 & 1 \end{pmatrix} \to A$$

$1+D+D^2$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1+D+D^2 & 1+D+D^2+D^3 & 1+D^2+D^3 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & D & 1+D & & \end{array}\right)$$

$1$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+D+D^2+D^3 & 1+D^2+D^3 & 1+D+D^2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & D & 1+D & & \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+D+D^2+D^3 & 1+D^2+D^3 \\ 0 & 1+D+D^2 & D+D^2 \end{pmatrix}$$

$1+D+D^2 \quad 1+D$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+D+D^2+D^3 & D & 1+D+D^2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 1 & D & 1 & & \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+D+D^2+D^3 & D \\ 0 & 1+D+D^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$D$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & D & 1+D+D^2 & 1 \\ \hline 0 & 1+D+D^2 & 1 & & \\ 0 & D+D^2 & 1 & & \\ 1 & 1+D^2 & 1 & & \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1+D+D^2 & 1 \\ \hline 0 & 1+D+D^2 & 1+D+D^2+D^3 & & \\ 0 & D+D^2 & 1+D^2+D^3 & & \\ 1 & 1+D^2 & 1+D+D^3 & & \end{array}\right)$$

$B^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+D+D^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+D & \cdots & 1 \\ 1+D+D^2 & \cdots & 0 \\ D+D^2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+D+D^2 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 & 1+ & \\ 0 & & \ddots \\ 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pol. pravý invert $G$: $G^*$ t.ž. $G \cdot G^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\underset{b \times c}{\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$G = A \cdot \Gamma \cdot B$$

$$G^* = B^{-1} \Gamma^* A^{-1} \; ; \quad \underline{\Gamma}^* = \left(\begin{array}{c} \gamma_1^{-1} \cdots \gamma_b^{-1} \\ \hline 0^* \end{array}\right)_{c \times b} \qquad \Gamma = \left( \gamma_1 \cdots \gamma_b \,|\, 0 \right)$$

$$G \cdot G^* = A \cdot \underbrace{\underline{\Gamma} \cdot \underbrace{\underline{B} \cdot \underline{B}^{-1}}_{I_c} \underline{\Gamma}^*}_{I_b} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_b$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+D+D^2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1+D+D^2 & 1+D+D^2+D^3 \\ 0 & D+D^2 & 1+D^2+D^3 \\ 1 & 1+D^2 & 1+D+D^3 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+D+D^2 \\ 0 & D+D^2 \\ 1 & 1+D^2 \end{pmatrix}$$

$D+D^2+D^3+D^2+D^3+D^4$

$1+D+D^2+D^2+D^4+D^3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1+D+D^2 \\ 0 & D+D^2 \\ 1 & 1+D^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+D+D^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+D^2+D^4 & 1+D+D^2 \\ D+D^4 & D+D^2 \\ 1+D+D^3+D^4 & 1+D^2 \end{pmatrix} = G^*$$

? Čo ak $G$ nemala pravý inverz

$$\underset{b\times c}{G} = \underset{b\times b}{A}\ \underset{b\times c}{T}\ \underset{c\times c}{B}$$

Ako nájsť $G'$ t.ž. generuje rovnaký kód ako $G$, ale má pol. pravý inverz?

$$\left(\gamma_1 \dots \gamma_b \,\middle|\, 0\right)$$

$$\gamma_i \notin \mathbb{F}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+D & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+D^2 & 1+D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ D & 0 & 1+D \end{pmatrix}$$

nedostaneme 1, ani súdeliteľné
dostaneme NSD

$$G = A \cdot T \cdot B$$

$$\underset{b\times b}{(\quad)}\underset{b\times c}{(\quad)}\underset{c\times c}{\left(\boxed{G'}_{\,b}\right)}$$

ekvivalentná matica, kt. má pravý inverz

$$B^{-1} = \left( \boxed{(G')^{-1}_{*}} \quad \right)$$

**Príklad** Má $G$ z Pr. 1 pol. pravý inverz v $D^{-1} = C$?

$$G = \begin{pmatrix} 1+D & D & 1 \\ D^2 & 1 & 1+D+D^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+C}{C} & \frac{1}{C} & 1 \\ \frac{1}{C^2} & 1 & \frac{1+C+C^2}{C^2} \end{pmatrix} =$$

$$D = \frac{1}{C}$$

$$\frac{1}{C^2}\begin{pmatrix} C+C^2 & C & C^2 \\ 1 & C^2 & 1+C+C^2 \end{pmatrix}$$

$+\ C+C^2+C^2+C^3+C^3+C^4$

$$\sim \frac{1}{C^2}\begin{pmatrix} 1 & C^2 & 1+C+C^2 \\ C+C^2 & C & C^2 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{C^2}\begin{pmatrix} 1 & C^2 & 1+C+C^2 \\ 0 & C+C^3+C^4 & C+C^2+C^4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \frac{1}{C^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C+C^3+C^4 & C+C^2+C^5 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{C^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C^2+C^3 & C+C^2+C^4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \frac{1}{C^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C^2+C^3 & C+C^2+C^3 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{C^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C^2+C^3 & C \end{pmatrix} \sim \quad T^* = \begin{pmatrix} C^2 & 0 \\ 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \frac{1}{C^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} \frac{1}{C^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}$$

ÁNO $G = A \cdot T \cdot B$