Věta (Rolleova) f spojitá na $[a,b]$, $\exists f'$ na (a,b), $f(a)=f(b)$

Pak $\exists\, \xi \in (a,b)$ $\quad f'(\xi) = \cancel{f(b)-f(a)}\ 0$.

Věta (Lagrange) f spojitá na $[a,b]$, $\exists f'$ na (a,b)

Pak $\exists\, \xi \in (a,b)$ $\quad f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Věta T4.9 (Cauchyova věta o střední hodnotě)

Nechť f,g jsou spojité funkce na intervalu $[a,b]$, takové, že f má v každém bodě (a,b) derivaci a g má v každém bodě (a,b) vlastní derivaci různou od nuly. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Špatný důk: Podle V4.7 $\exists\, \xi_1 \in (a,b)$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Podle V4.7 $\exists\, \xi_2 \in (a,b)$ $\quad g'(\xi_2) = \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

ξ_2

$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 20-2

Dk: Tvrdím že $g(b)-g(a) \neq 0$. Jinak by podle Rolleovy věty $\exists \xi \in (a,b)$, $g'(\xi) = 0$. $\lightning$

Definujme

$$H(x) = [f(x)-f(a)] \cdot [g(b)-g(a)] - [f(b)-f(a)] \cdot [g(x)-g(a)].$$

Pak H je spojitá na $[a,b]$ a

$$H(a) = [f(a)-f(a)] \cdot [g(b)-g(a)] - [f(b)-f(a)] \cdot [g(a)-g(a)] = 0 \text{ a}$$

$$H(b) = [f(b)-f(a)] \cdot [g(b)-g(a)] - [f(b)-f(a)] \cdot [g(b)-g(a)] = 0.$$

Dále $H'(x) = \underbrace{f'(x)}_{\in \mathbb{R}^*} \cdot [g(b)-g(a)] - [f(b)-f(a)] \cdot \underbrace{g'(x)}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}^*$

Podle Rolleovy věty V4.6. $\exists \xi \in (a,b)$ tak, že

$$0 = H'(\xi) = f'(\xi) \cdot [g(b)-g(a)] - [f(b)-f(a)] \cdot g'(\xi). \quad / \cdot \frac{1}{g'(\xi)} \cdot \frac{1}{g(b)-g(a)}$$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

$\square$

Věta T 4.10 (l'Hospitalovo pravidlo) 20-3

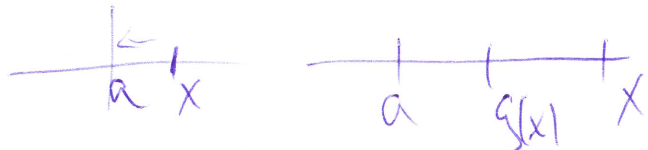
(i) Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = \lim\limits_{x \to a_+} g(x) = 0$ a nechť existuje $\lim\limits_{x \to a_+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak $\lim\limits_{x \to a_+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a_+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

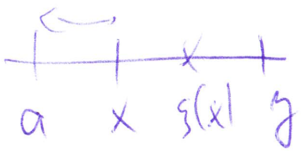
(ii) Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to a_+} |g(x)| = +\infty$ a nechť existuje $\lim\limits_{x \to a_+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak $\lim\limits_{x \to a_+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a_+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Poznámka: Platí i pro $\lim\limits_{x \to a_-}$ a $\lim\limits_{x \to a}$.

IDEA DK: (i) $\frac{0}{0}$ „$f(a) = g(a) = 0$"

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$



(ii) 

„$\frac{\infty}{\infty}$"

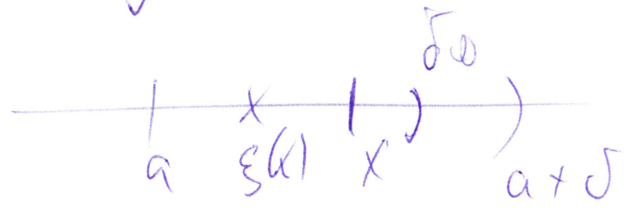
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \xrightarrow{x \to a_+} \approx \frac{f(x)}{g(x)}$$

$\cancel{\varepsilon + \varepsilon = \partial}$

Dk: (ii) $a \in \mathbb{R}$. Víme $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Tedy $\exists \delta > 0 \ \forall x \in P_+(a, \delta) \quad g'(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) \in \mathbb{R}$.

Definujeme $f(a) = g(a) = 0$. Pak f a g jsou spojité na $[a, a+\delta)$ a existují na $(a, a+\delta)$ ~~[illegible]~~ f' a g'. Jsou splněny předpoklady V 4.9. na intervalu $[a, x]$ $\forall x \in (a, a+\delta)$.



Existuje tedy $\xi(x) \in (a, x)$ tak, že

$$(*) \quad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}.$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ existuje $0 < \delta_0 < \delta$ tak, že

$$\forall y \in (a, a+\delta_0): \ \frac{f'(y)}{g'(y)} \in B(A, \varepsilon).$$

Nyní $\forall x \in (a, a+\delta_0)$ máme $\xi(x) \in (a, x) \subset (a, a+\delta_0)$, tedy ~~$(y = \xi(x))$~~

$$\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} \in B(A, \varepsilon),$$

a tedy díky $(*)$ $\frac{f(x)}{g(x)} \in B(A, \varepsilon) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

$a = -\infty$ ($a = +\infty$ analogicky)

Platí $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = B \in \mathbb{R}^* \iff \lim\limits_{y \to 0+} h\left(-\frac{1}{y}\right) = B$ (VOLSF XSI)

$\exists \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Zavedeme pomocné funkce

$F(y) = f\left(-\frac{1}{y}\right)$ Pak $F'(y) = f'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2}$ na jistém

$G(y) = g\left(-\frac{1}{y}\right)$ $\quad G'(y) = g'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2}$ $P_+(0,\delta)$

$h = \frac{f}{g}$

Nyní $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{y \to 0+} \frac{F(y)}{G(y)}$

pro $h = \frac{f'}{g'}$ Víme

a $\lim\limits_{y \to 0+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim\limits_{y \to 0+} \frac{f'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \cancel{\frac{-1}{y^2}}}{g'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \cancel{\frac{-1}{y^2}}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

"$F(0) = f(-\infty) = 0$"
"$G(0) = g(-\infty) = 0$"

~~Nyní z části (i)~~ Nyní z části (i) pro bod 0+ a F, G dostaneme

$$A = \lim_{y \to 0+} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$\square$

20-6

Příklady:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$

2) $\lim_{\substack{n\to\infty \\ a,b>0}} \frac{\log^a n}{n^b} \overset{\text{Heine}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\log^a x}{x^b} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\log x}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^a$

$\overset{\text{VOLSF}}{\underset{(P)}{=}} \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^a = 0^a = 0$

$f(y) = y^a$

$g(x) = \frac{\log x}{x^{\frac{b}{a}}} \neq 0$ na $(1,\infty)$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\frac{b}{a}}} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{x^{\frac{b}{a}-1}\cdot\frac{b}{a}} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{b}{a}\cdot x^{\frac{b}{a}}} = \frac{1}{\infty} = 0$

VAROVÁNÍ: OVĚŘOVAT PŘEDPOKLADY

a) $1 = \lim_{x\to 0} \frac{1+2x}{1+3x} \cancel{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

b) $+\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+2\sin x} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+2\cdot\cos x}$ NEEXISTUJE

$\frac{x^2}{x+2\sin x} \geq \frac{x^2}{x+2}$