Velké nezávislé systémy

Tvrdíme, že následující systém rovnic je nezávislý a má minimální defekt. Neznámé jsou $\Theta = \{x, y\} \cup \{u_i, v_i, w_i \mid i = 1, \ldots, n\}$, tedy celkem $3n + 2$ neznámých. Systém

$$S = \{(xu_j w_k v_j y\,,\; yu_j w_k v_j x) \mid j, k = 1, \ldots, n\}$$

má velikost n^2.

Systém S má zjevně (principiální) řešení $\varepsilon_{x,y}$, které je ranku $|\Theta| - 1$. Ukažme, že je systém nezávislý. Pro každou dvojici s, t tedy musíme najít řešení $\psi_{s,t}$, které je řešením všech rovnic z S, kromě $(xu_s w_t v_s y\,,\; yu_s w_t v_s x)$. Uvažujme $\psi = \psi_{s,t}$ pro pevná s a t. Díky symetrii můžeme předpokládat, že $\psi(x)$ je kratší než $\psi(y)$. Pak je $\psi(x)$ prefixem i sufixem $\psi(y)$, neboli $\psi(y) = \psi(x)z_1 = z_2\psi(x)$. Tedy $z_1 = pq$, $z_2 = qp$ a rovnosti dané rovnicemi mají tvar

$$pq\psi(u_j w_k v_j) = \psi(u_j w_k v_j)qp.$$

Taková rovnost platí právě když $\psi(u_j w_k v_j) \in (pq)^* p$. Hledáme tedy slova $\psi(u_i)$, $\psi(w_i)$, $\psi(v_i)$ taková, že $\psi(u_j w_k v_j)$ leží v $(pq)^* p$ pro všechny dvojice (j, k) kromě (s, t).

Nechť $p = ba$ a $q = b$. Pro libovolné $j \neq s$ položme $\psi(u_j) = bab$ a $\psi(v_j) = a$. Pak $\psi(u_j w_k v_j) \in (bab)^* ba$ právě když $\psi(w_k) \in (bab)^* b$. Nechť tedy $\psi(w_t) = babb$ a $\psi(w_k) = b$ pro $k \neq t$. Nyní jsou dvě možnosti, jak pro $k \neq t$ může platit $\psi(u_j w_k v_j) = \psi(u_j)b(v_j) \in (bab)^* ba$. Kromě možnosti, že ono b, které je obrazem w_k představuje první výskyt písmene b ve slově bab – tato možnost odpovídá tomu, jak jsme $\psi(w_k)$ zvolili – existuje ještě možnost druhá, že toto b je druhým výskytem písmene b ve slově bab. Tato možnost je ovšem vyloučena v případě $\psi(u_j)babb(v_j) \in (bab)^* ba$. Stačí tedy zvolit $\psi(u_s)$ a $\psi(v_s)$ tak, aby využívala druhou možnost. Tedy např. $\psi(u_s) = \psi(v_s) = ba$.

*

Pro tři neznámé existuje hypotéza, že libovolný nezávislý systém rovnic, který má společné řešení řádu dva, obsahuje nejvýše dvě rovnice. Příkladem takového systému je

$$\{(xyz, zyx), (xyyz, zyyx)\}.$$

Společným řešením je $x \mapsto a$, $y \mapsto b$, $z \mapsto a$. První rovnice má řešení $x \mapsto a$, $y \mapsto b$, $z \mapsto aba$, které není řešením rovnice druhé. Naopak $x \mapsto a$, $y \mapsto b$, $z \mapsto abba$ je řešením druhé rovnice a nikoli první.

Příkladem systému tří nezávislých rovnic (majících pouze prázdné společné řešení) je

$$\{(x, yy), (y, zz), (z, xx)\}.$$